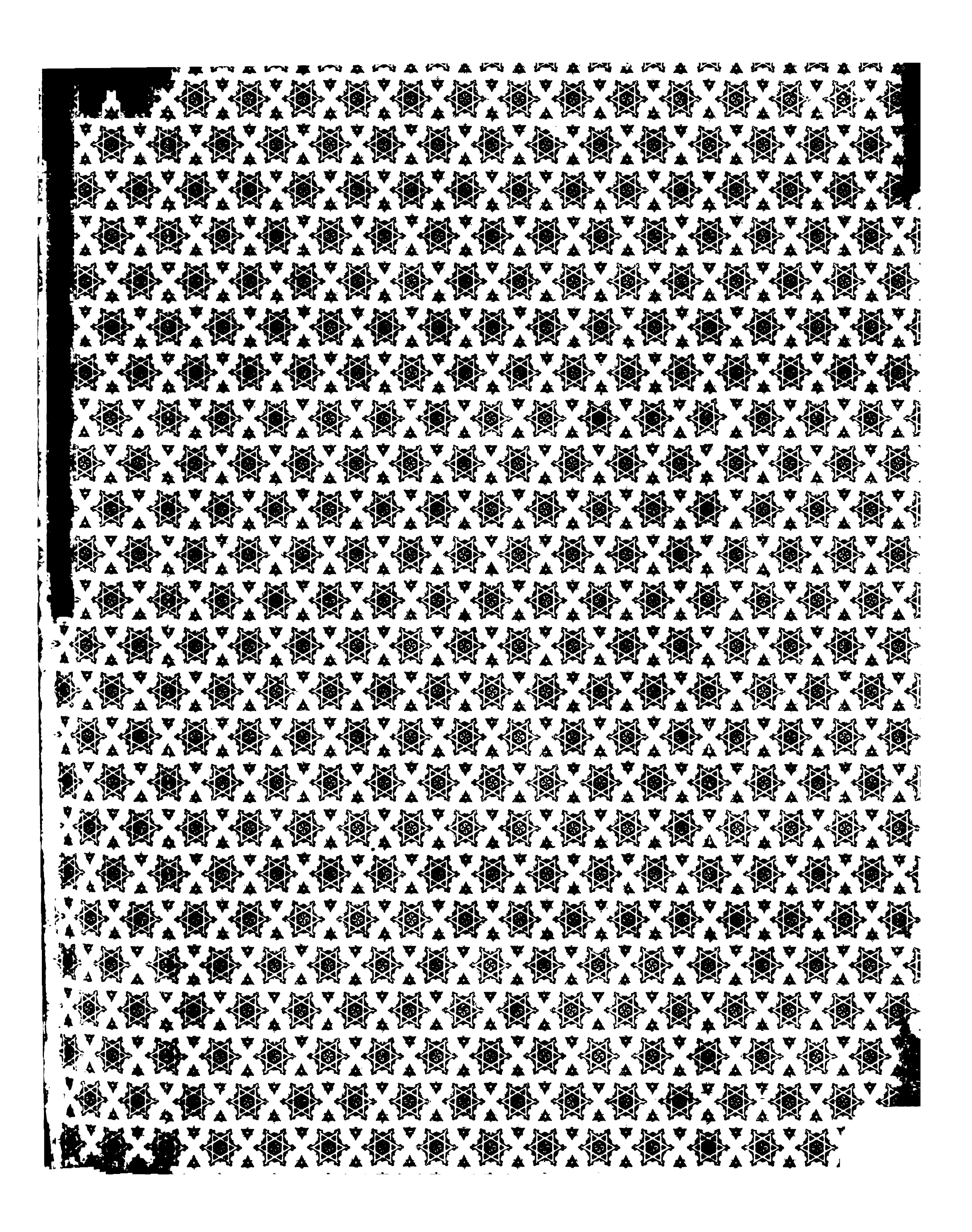



1837
ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
SI QUAERIS PENINSULAM AMOENAM
CIRCUMSPICE



Ausgewählte Kapitel
der
Zahlentheorie II.

Vorlesung,

gehalten im Sommersemester 1896

von

F. Klein.

Ausgearbeitet von A. Sommerfeld und Ph. Furtwängler.

GÖTTINGEN 1897.

Inhaltsverzeichnis.

Seite

Einleitung.

Erster Hauptteil: Von der Transformation höherer Ordnung der elliptischen Funktionen.

1. Die Transformation bei der Gitterfigur.

2. Die Transformation der Grössen erster Stufe.

3. Die Transformation von Grössen höherer Stufe.

Seite

Zweiter Hauptteil: Von der Composition der zu derselben Discriminante gehörigen ganzzahligen Gitter (insbes. für Stammdiscriminanten).

1. Elementare Constructionen.

2. Composition der Gitter (speciell der Stammgitter).

3. Die Teilbarkeitsgesetze im Gebiete der orientierten Gitterzahlen.

Seite

Dritter Hauptteil: Von den singulären elliptischen Gebilden.

1. Einleitung.

2. Die singulären j.

3. Die singulären Werte der Ikosaederirrationalität.





Einleitung.

Do. 23.4.96. Unsere Hauptaufgabe im kommenden Semester wird es sein, dem wunderbaren Zusammenhange nachzugehen, welcher zwischen der Theorie der definiten binären quadratischen Formen und der Theorie der elliptischen Functionen besteht. Der Zusammenhang wird unmittelbar verdeutlicht durch die gemeinsame geometrische Vorstellung des Gitters, welche wir in dem ersten Theile dieser Vorlesung der Behandlung der quadratischen Formen zu Grunde legten und welche sich beim Studium der elliptischen Functionen von selbst darbietet. Indem wir bei unserem Gitter die Punkte und nicht die verbindenden Geraden als das wesentliche ansahen, kamen wir dazu, in der Zahlentheorie das Aquivalenzproblem voranzustellen und alle diejenigen Formen als gleichwerthig in eine Klasse zusammenzufassen, welche zu demselben Punktgitter gehö-

ren. In der Functionentheorie entspricht diesem Standpuncte, daß wir die elliptischen Functionen nicht allein durch die Periodicität in der Variabeln u definiren, sondern daß wir auch ihre Abhängigkeit von den Perioden ω_1, ω_2 betrachten und sie durch ihr Verhalten gegenüber den linearen Periodentransformationen

$$\left.\begin{aligned} \omega_1' &= \alpha\,\omega_1 + \beta\,\omega_2 \\ \omega_2' &= \gamma\,\omega_2 + \delta\,\omega_2 \end{aligned}\right\} \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

characterisiren. Die elliptischen Functionen sind hiernach Functionen dreier Variabeln u, ω_1, ω_2, welche durch gewisse Invarianteneigenschaften ausgezeichnet sind.

Wir sehen uns jedoch gezwungen, in der Folge noch einen Schritt weiter zu gehen; wir werden nur solche elliptischen Functionen untersuchen, in denen u überhaupt nicht vorkommt, werden uns also auf elliptische Modulfunctionen beschränken. Wir haben schon gegen Ende des vorigen

Semesters betont, daß wir diese Beschränkung, welche ja auch in den „Vorlesungen über Modulfunctionen" zu Grunde liegt, an sich durchaus nicht für wünschenswerth halten. Sie bringt es mit sich, daß sehr interessante Abschnitte der Theorie, so die Theilung der elliptischen Functionen, die allgemeine Transformationstheorie, nicht zur Sprache kommen werden. Indessen ist bei der Kürze der Zeit eine gewisse Auswahl des Stoffes durchaus geboten. Alles dieses wurde schon zum Schlusse des vorigen Semesters in seinen allgemeinen Umrissen erläutert, und es wurde auch schon betont, nach welcher Seite sich das besondere Interesse wendet. Die Sache ist folgende:

In der Zahlentheorie ist man gewohnt, die Coefficienten der quadratischen Form als ganzzahlig vorauszusetzen; gerade die wichtigsten Resultate der Theorie beziehen sich auf diesen Fall. Dementsprechend

werden wir unter den elliptischen Gebilden insbesondere solche betrachten, welche zu ganzzahligen quadratischen Formen gehören, in dem Sinne, daß die Norm der allgemeinsten Periode des Gebildes

$$(\omega_1 x + \omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y)$$

gleich einer Form

$$a x^2 + b x y + c y^2$$

mit ganzzahligen Coefficienten wird. Diese Gebilde nennt man nach dem Vorgange von Kronecker <u>singuläre elliptische Gebilde</u>. Es wird sich für uns darum handeln, die besonderen Eigenschaften kennen zu lernen, welche die singulären elliptischen Gebilde gegenüber der Periodentransformation n^{ter} Ordnung.

$$\left.\begin{aligned} \Omega_1 &= A\omega_1 + B\omega_2 \\ \Omega_2 &= C\omega_1 + D\omega_2 \end{aligned}\right\} AD - BC = n$$

aufweisen. Man bezeichnet diesen Gegenstand gewöhnlich kurzweg als die <u>complexe Multiplication</u>

der elliptischen Functionen. Die Bezeichnung rührt daher, daß unter den genannten Transformationen solche vorhanden sind, welche in einer Multiplication der Perioden mit einer complexen Zahl bestehen und daß diese besondere Transformation durch die Abhandlungen von Abel zuerst bekannt geworden ist.

Die Lehre von der complexen Multiplication bildet nach der allgemeinen Ansicht der Mathematiker einen der schönsten und zugleich einen der schwierigsten Theile unserer Wissenschaft: So konnte Camille Jordan in der Einleitung zu seinem Traité des Substitutions die von Kronecker aufgestellten Theoreme „l'envie et le désespoir des géomètres" nennen. Ich hoffe, Ihnen zeigen zu können, daß infolge der in der Neuzeit erreichten Fortschritte keine eigentliche Schwierigkeit mehr mit dem Gegenstande verbunden ist, man vielmehr die

Haupttheoreme durchaus auf einfachem Wege einsehen kann.

Fr. 24. 4. 96. Bereits im vorigen Semester haben wir von der <u>Stufeneintheilung</u> der elliptischen Modulfunctionen gesprochen. Wir bezeichneten als Functionen der ersten Stufe solche Moduln, welche, wie die Function $J(\omega)$, bei der Gesammtgruppe der linearen Periodentransformationen in sich übergehen. Neben der Gesammtgruppe werden insbesondere diejenigen Untergruppen in Betracht gezogen und als Hauptcongruenzgruppen n^{ter} Stufe bezeichnet, deren Substitutionen modulo einer gegebenen Zahl n der Identität congruent sind.

Für die Hauptcongruenzgruppe der 2ten Stufe haben wir den Discontinuitätsbereich schon früher bestimmt. Er bestand aus dem Sechsfachen des Discontinuitätsbereiches

der Gesammtgruppe, entsprechend dem Umstande, dass der Index dieser Untergruppe gleich 6 ist. In dem <u>Doppelverhältnisse λ der Verzweigungspunkte des gewöhnlichen elliptischen Integrals</u> erkannten wir einen <u>Hauptmodul zweiter Stufe</u>, d. h. eine Modulfunction, welche in dem genannten Bereiche jeden Werth einmal und nur einmal annimmt. Eine unmittelbare Folge dieser Eigenschaft ist, daß die Gleichung

$$\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}, \quad \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \pmod{2}$$

die andere Gleichung

$$\lambda(\omega') = \lambda(\omega)$$

nach sich zieht, und daß umgekehrt diese Gleichung das Bestehen jener bedingt. Jede andere Function desselben Fundamentalbereiches wird eine rationale Function von λ, insbesondere ist J eine rationale Function 6ten Gra-

des: $\mathfrak{J}(\omega) = R_6(\lambda)$. Die Existenz eines Hauptmoduls zeigt an, dass der Fundamentalbereich zweiter Stufe vom Geschlechte 0 ist, d. h. dass er bei der durch die Kantenzuordnung angezeigten Zusammenbiegung in eine geschlossene Fläche vom Geschlechte 0 übergeht. Es hat dies insbesondere zur Folge, dass die 6 Werthe von λ, welche zu dem nämlichen Werthe von $\mathfrak{J}$ gehören, linear untereinander zusammenhängen. Wegen des Beweises aller dieser Behauptungen vergl. Modulf. I pg. 270 u. ff., sowie die Figur von pg. 72.

Ähnlich liegen die Verhältnisse bei den Hauptcongruenzgruppen 3ten, 4ten und 5ten Stufe. Auch hier ist das Geschlecht des Discontinuitätsbereiches gleich 0, dagegen wird es für die höheren Stufen grösser als 0. Dementsprechend giebt es einen Hauptmodul 3ten, 4ten und 5ten Stufe, derselbe wird mit $\xi(\omega)$, $\mu(\omega)$, $\zeta(\omega)$ bezeichnet und bez. Tetraëder-

Oktaëder-, Ikosaëder-Irrationalität genannt. Die Benennung gründet sich darauf, daß die betr. Discontinuitätsbereiche auf dieselbe Weise in Discontinuitätsbereiche der Gesammtgruppe zerfallen, wie die Kugel beiden Gebietseintheilungen der regulären Körper. In demselben Sinne gehört der Modul λ zum „Dieder" $n = 3$. Man vergleiche hierzu „Modulf" I pg. 354, 355, 356, wo die Figuren in der ω-Ebene, und pg. 104, 76, 106, wo die entsprechenden Figuren auf der Kugel dargestellt sind. Die Zerlegung der Discontinuitätsbereiche in Unterbereiche geht Hand in Hand mit der algebraischen Abhängigkeit der Moduln höherer Stufe von dem Modul J. Wir wollen die Beziehung für die 5te Stufe explicite angeben. Der zugehörige Disc. besteht aus 60 Disc. der Gesammtgruppe; daher wird J eine rationale Function 60ten Grades von ζ. Wir schreiben dieselbe in der Ge-

Gestalt einer fortlaufenden Proportion folgendermassen an:

$$J : (J-1) : 1 = \left[-\zeta^{20} - 1 + 228(\zeta^{15} - \zeta^{5}) - 494\zeta^{20}\right]^{3}$$
$$: -\left[\zeta^{30} + 1 + 522(\zeta^{25} - \zeta^{5}) - 1005(\zeta^{20} + \zeta^{10})\right]^{2}$$
$$: 1728\,\zeta^{5}(\zeta^{10} + 11\zeta^{5} - 1)^{5}.$$

Vergl. hierzu „Modulf" I pg. 105 und II pg. 383.

Die vorstehende Gleichung heisst die <u>Ikosaëdergleichung</u>; sie definirt ζ als algebraische Function von J.

Wir werden von der Ikosaëderirrationalität im Folgenden einen consequenten Gebrauch machen. Es zeigt sich ohnehin, dass man in der Transformationstheorie bei den Moduln der 1ten Stufe nicht stehen bleiben kann. In der vorhandenen Litteratur kommt bereits häufig das Doppelverhältnis λ, dann $\sqrt{\lambda}$, $\sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}$ etc. vor. Demgegenüber werden wir durchgehends die Ikosaëderirrationalität bevorzugen.

Wir haben in der Einleitung betont, dass der zahlentheoretische Aequiva-

lenzbegriff der Invarianteneigenschaft der elliptischen Functionen genau entspricht. Dies trifft jedoch zunächst nur hinsichtlich der Modulfunctionen 1ter Stufe zu. Um auch die Modulfunctionen höherer Stufen für die Zahlentheorie fruchtbar zu machen, müssen wir den Aequivalenzbegriff verfeinern. Neben der Aequivalenz schlechtweg werden wir die <u>relative Aequivalenz modulo</u> <u>n</u> stellen, indem wir die zu betrachtenden Substitutionen, welche die eine Form in die andere überführen sollen, auf die Hauptcongruenzgruppe nter Stufe beschränken. Es entsteht insbesondere die Frage: <u>Wann sind zwei quadratische Formen negativer Discriminante in diesem Sinne relativ aequivalent?</u>

Die Beantwortung dieser Frage ist in unsern Modulfiguren der ω-Ebene vollständig enthalten. In der That geben dieselben in allen Fällen ein geeignetes „Reductionsverfahren" zur Entscheidung der Aequi-

valenz. Die einzelne Form wird in der w-Ebene durch dasjenige Paar conjugirter Punkte dargestellt, für welches $aw^2 + bw + c$ verschwindet. Handelt es sich um die gewöhnliche Aequivalenz, so giebt es eine und nur eine Substitution der Gesammtgruppe, welche einen Punkt des Paares in den Ausgangsraum der Dreiecksthei-lung überführt. Zwei Formen waren nun aequivalent, wenn sie bei der hierdurch definirten Reduction denselben Punkt des reducirten Raumes ergaben. In ganz entsprechender Weise werden wir verfahren, wenn nach der relativen Aequivalenz zweier Formen gefragt ist. Wir dürfen dann bei der Reduction nur die Substitutionen der betr. Untergruppe benutzen. Durch diese gelingt es jedesmal in eindeutiger Weise, die repräsentirenden Punkte der gegebenen Formen in den zu der betr. Hauptcongruenzgruppe gehörigen reducirten Discontinui-

tätsbereich zu bringen. Fallen dabei die repräsentirenden Punkte zusammen, so sind die Formen relativ aequivalent, im anderen Falle sind sie es nicht. Um die Reduction wirklich auszuführen, haben wir die erzeugenden Operationen der Untergruppe nach einem bestimmten Gesetze zu combiniren. Diese erzeugenden Substitutionen sind keine anderen, als diejenigen, welche die Kanten des reducirten Discontinuitätsbereiches zusammenordnen.

30.4.96. Wir erwähnten neben den Modulfunctionen der niedersten Stufe in der letzten Stunde des vorigen Semesters bereits einige Modulfunctionen höherer Stufen, welche zu denen der untersten Stufen in einem einfachen algebraischen Verhältniß stehen. Besonders wichtig ist in dieser Hinsicht die in ω_1, ω_2 eindeutige Function:

$$\sqrt[12]{\Delta},$$

welche wir, da Δ von der ersten Stufe ist, als <u>der ersten Stufe adjun</u>-

girt bezeichneten. In demselben Sinne sind der zweiten Stufe adjungirt beispielsweise:

$$\sqrt[8]{\lambda}\,, \quad \sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)}\,.$$

Eine directe Untersuchung von $\sqrt[12]{\Delta}$ findet man bei Hurwitz: Math. Ann. Bd. 18. Vergl. auch Modulf. I pg. 623.

Wichtig ist für uns u. a., dass $\sqrt[12]{\Delta}$ in der sog. „Kronecker'schen Grenzformel" auftritt. Ich kann auch über diesen interessanten Gegenstand hier nur ganz kurz referiren.

Kronecker knüpft an die Untersuchungen von Dirichlet zur Bestimmung der Klassenanzahl an, welche in der Zahlentheorie von Dirichlet-Dedekind, Cap. V, dargestellt sind. Das Charakteristische der Dirichlet'schen Untersuchungen ist das Hereinspielen der unendlichen Reihen in die Zahlentheorie. Dirichlet betrachtet bei gegebener quadratischer Form $ax^2 + bxy + cy^2$ die Reihe

$$\sum \frac{1}{(ax^2+bxy+cy^2)^{1+\varrho}},$$

in welcher sich die Summation über alle ganzen Zahlen x und y erstreckt, mit Ausnahme des Wertepaares $x=0, y=0$. Die Zahl ϱ muss grösser als Null genommen werden, damit die Reihe convergiert. In unserer Ausdrucksweise bedeutet die Reihe nichts Anderes als

$$\sum \frac{1}{(r^2)^{1+\varrho}},$$

wo r die Entfernung der Gitterpunkte von O ist und wo über alle Gitterpunkte summiert wird: Dirichlet geht dann zum Limes $\varrho=0$ über und zeigt, dass

$$\lim_{\varrho=0} \varrho \sum \frac{1}{(ax^2+bxy+cy^2)^{1+\varrho}} = \frac{2\pi}{\sqrt{D}}$$

Als Function von ϱ aufgefasst, besitzt also die Dirichlet'sche Reihe für $\varrho=0$ einen einfachen Pol.

Die Leistung von Kronecker besteht nun darin, dass er in der Entwicke-

lung der Reihe nach Potenzen von ϱ das nächst folgende Glied bestimmte. Es ergiebt sich

$$\frac{\sqrt{\mathfrak{D}}}{2\pi}\sum\frac{1}{(ax^2+bxy+cy^2)^{1+\varrho}}=\frac{1}{\varrho}+\left(\mathfrak{C}-\lg\left\{(\omega_1\bar{\omega}_2-\omega_2\bar{\omega}_1)\sqrt[12]{\Delta\bar{\Delta}}\right\}\right)+\cdots\cdots$$

wo $\mathfrak{C}$ eine numerische Constante ist.*) Dieses ist die Kronecker'sche Grenzformel.

Wir fassen dieselbe hier auf als eine Methode zur Berechnung von $\sqrt[12]{\Delta}$ und schreiben dementsprechend:

$$\log\left\{(\omega_1\bar{\omega}_2-\omega_2\bar{\omega}_1)\sqrt[12]{\Delta\cdot\bar{\Delta}}\right\}=$$
$$=\mathfrak{C}+\frac{1}{\varrho}-\frac{\sqrt{\mathfrak{D}}}{2\pi}\left(\sum\frac{1}{(ax^2+bxy+cy^2)^{1+\varrho}}\right)_{\lim\varrho=0}$$

Merkwürdiger Weise erscheint hier nicht die Function $\sqrt[12]{\Delta}$, sondern ihre Norm in eine Reihe entwickelt, im Gegensatz zu allen sonst bekannten Reihen der Functionstheorie. Ebenso können wir die rechte Seite als ein Aggregat von Normen auffassen, da nämlich

*) Hier ist natürlich $(\omega_1\bar{\omega}_2-\omega_2\bar{\omega}_1)=\sqrt{\mathfrak{D}}$.

$$ax^2 + bxy + cy^2 = |\omega_1 x + \omega_2 y|.$$

Wir kommen also in diesen modernsten Gebieten der Functionentheorie auf die Entwickelung einer Norm, welche nach Functionen von Normen fortschreitet, auf eine reelle Reihe von Functionen reeller Variabler!

Die Kronecker'schen Arbeiten befinden sich an verschiedenen Stellen vergl. insbesondere den Beweis der fortlaufenden Artikelreihe über elliptische Functionen, in den Sitzungsberichten d. Berliner Academie, 1883 No 1-5 und 1885 No 6-10. Weber behandelt die Kronecker'sche Grenzformel in §. 113 seiner elliptischen Functionen.

Erster Haupttheil.

Nach dieser einleitenden Übersicht handeln wir nun ausführlich von der

Transformation hoeherer Ordnung.

der Gitter und der mit ihr parallel laufenden Transformation höherer Ordnung der elliptischen Functionen.

Vorab bemerken wir, dass der Standpunct, auf dem wir uns mit den Gittern befassen, der umfassendere ist und eine allgemeine Bedeutung für die Zahlentheorie besitzt, und dass die Beziehung zu den elliptischen Functionen erst dann zu Stande kommt, wenn wir dem Gitter speziell eine definite Form (eine elliptische Maassbestimmung) zuordnen. Dieselbe Bemerkung gilt auch für die späteren Auseinandersetzungen

dieser Vorlesung.

Unter einer Transformation n^{ter} Ordnung verstehen wir Folgendes: Wir setzen

$$1)\quad \left\{\begin{array}{l} \Lambda_1 = a\omega_1 + b\omega_2 \\ \Lambda_2 = c\omega_1 + d\omega_2 \end{array}\right\} ad - bc = n > 1.$$

Hier bedeuten ω_1, ω_2 die Gitterzahlen (im Besonderen die gewöhnlichen complexen Zahlen), welche zu den dem Anfangspunkte anliegenden Eckpunkten irgend eines Parallelogramms gehören, welches wir dem ursprünglichen Gitter als Elementarparallelogramm einzeichnen können. Gleichzeitig werden Λ_1, Λ_2 die Gitterzahlen welche in demselben Sinne zu den Eckpunkten eines neuen Gitters gehören. Von denselben sagen wir, dass es *dem ursprünglichen Gitter eingelagert* ist. Die vorstehenden Formeln zeigen, dass nicht alle Ecken des alten Gitters in dem neuen Gitter vorkommen. Das eingelagerte Gitter besitzt

also, wie schon durch seine Benennung angezeigt wird, grösere Maschen als das ursprüngliche. Man berechnet leicht, dafs das neue Elementarparallelogramm n-mal so gross ist, wie das ursprüngliche.

Statt von den Gittern können wir natürlich auch von den quadratischen Formen sprechen. So geschieht es bei Gauss. Gauss betrachtet neben der Form

$$f = a'x^2 + b'xy + c'y^2 = (\omega_1 x + \omega_2 y)(\bar{\omega}_1 x + \bar{\omega}_2 y)$$

die andere

$$F = AX^2 + BXY + CY^2 = (\Lambda_1 X + \Lambda_2 Y)(\bar{\Lambda}_1 X + \Lambda_2 Y),$$

in welcher die Λ mit den ω durch die Substitution 1) zusammenhängen. In Folge dessen haben wir:

$$F = (\omega_1 (aX + cY) + \omega_2 (bX + dY))(\bar{\omega}_1 (aX + cY) + \bar{\omega}_2 (bX + dY)).$$

Dies ist aber nichts Anderes, als der vorstehende Ausdruck für f, falls wir eintragen:

$$2)\quad \begin{cases} x = aX + cY \\ y = bX + dY \end{cases}$$

Hiernach können wir sagen: Es entsteht F aus f, wenn wir die Grössen x und y durch die Transformation 2) von der Determinante n substituiren und nach Potenzen der Grössen X und Y ordnen.

Eine in solcher Weise abgeleitete Form F nennt Gauss „in f enthalten". Diese Bezeichnung entspricht unserer Ausdrucksweise von dem „eingelagerten Gitter". Hinsichtlich der Discriminante ergiebt sich

$$D_F = n^2 D_f.$$

Diese Gleichung kommt auf unsere obige Angabe über den Flächeninhalt der Elementarparallelogramme hinaus.

Wir werden unsererseits aber hier wie auch sonst lieber bei den Gittern bleiben. Der Übergang

zu den Formen würde bedeuten, daß wir die einzelne Gitterzahl jedesmal mit einem Factor, der conjugirten Gitterzahl, multipliciren. Dadurch würden wir die Betrachtung unnöthig beschwerlich machen.

Wir geben zunächst eine <u>Eintheilung unserer Transformationen nach der Größe des gemeinsamen Theilers</u>, welcher in den Coefficienten der Gleichung 1) enthalten ist.

Ein besonders einfacher Fall ist der, wo nach Absonderung des gemeinsamen Theilers die Determinante der Coefficienten gleich 1 wird. In diesem Falle können wir (ev. durch Übergang zu einem aequivalenten Periodenpaar $\omega_1\ \omega_2$) der Transformation die Form geben:

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_1 = m\,\omega_1 \\ \Omega_2 = m\,\omega_2 \end{array}\right|\ n = m^2.$$

Wir haben dann die <u>gewöhnliche Multiplication</u> vor uns.

Das entgegengesetzte Extrem findet

statt, wenn die Coefficienten a, b, c, d überhaupt keinen gemeinsamen Theiler haben. Wir sprechen dann von einer <u>eigentlichen Transformation</u> n^{ter} Ordnung. Zwischen diesen äussersten Fällen giebt es Zwischenstufen, welche man als <u>gemischte Transformationen</u> bezeichnen kann. Hierunter verstehen wir unter τ einen quadratischen Theiler von n verstanden, Transformationen von der Form:

$$\left.\begin{array}{l} \Lambda_1 = \tau(a'\omega_1 + b'\omega_2) \\ \Lambda_2 = \tau(c'\omega_1 + d'\omega_2) \end{array}\right| n = \tau^2(a'd' - b'c'),$$

wo nun a', b', c', d' theilerfremd sein sollen.

Sodann beschäftigen wir uns mit der Frage:

<u>Wie viel verschiedene Gitter giebt es, welche durch Transformation n^{ter} Ordnung einem gegebenen Gitter eingelagert werden können?</u>

Die Antwort lautet verschieden, je nachdem wir nach Parallelgittern oder nach Punktgittern fragen.

Parallelgitter giebt es natürlich in unendlicher Anzahl. Um sie aufzustellen, brauchen wir nur die Diophantische Gleichung

$$ad - bc = n$$

in allgemeinster Weise zu lösen, welche unendlich viele Wurzeln hat.

Um die Anzahl der Punktgitter zu finden, gehen wir von irgend einem Parallelgitter, d. h. von irgend einem Lösungssystem a, b, c, d aus. Auf dieses wenden wir eine Transformation erster Ordnung an, wodurch das Punktgitter nicht verändert wird. – Wir setzen also:

$$\Omega'_1 = \alpha\Omega_1 + \beta\Omega_2 = (\alpha a + \beta c)w_1 + (\alpha b + \beta d)w_2$$

$$\Omega'_2 = \gamma\Omega_1 + \delta\Omega_2 = (\gamma a + \delta c)w_1 + (\gamma b + \delta d)w_2$$

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Wir wollen nun diese $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ dazu benutzen, um die Coefficienten des letzten Gliedes möglichst zu vereinfa-

chen, oder anders ausgedrückt, wir wollen unter der Schaar der aequivalenten Gitter ein Bestimmtes aussuchen von besonders einfacher Gestalt. Dieses nennen wir den Repräsentanten der Klasse. Wir haben dann, um die Anzahl der verschiedenen Punktgitter zu finden, nur nöthig, die Repräsentanten abzuzählen. Ueber die $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ verfügen wir folgendermassen. Wir bestimmen γ und δ aus der Gleichung

$$\gamma a + \delta c = 0$$

als theilerfremde Zahlen. Es ist dann immer möglich, Zahlen α und β zu finden, so dass

$$\alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

wird. Unsere Transformation lautet jetzt:

$$\begin{array}{l} \Omega_1' = \mathfrak{A}\omega_1 + \mathfrak{B}\omega_2 \\ \Omega_2' = \qquad\quad \mathfrak{D}\omega_2 \end{array} \Bigg| \ \mathfrak{A}\mathfrak{D} = n.$$

Dasselbe Verfahren wenden wir von Neuem an, indem wir Ω_1', Ω_2' linear

substituiren. Dadurch können wir zunächst erreichen, daß $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ positiv werden. Da nämlich $n > 0$, so haben $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ dasselbe Vorzeichen. Ist dieses negativ, so gehen wir zu $-\Lambda_1', -\Lambda_2'$ über, was einer Transformation erster Ordnung entspricht. Dabei wird das Vorzeichen von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{D}$ umgekehrt. Ferner können wir erreichen, daß

$$0 \leqq \mathfrak{B} < \mathfrak{D}$$

wird. Durch die Transformation

$$\Lambda_1'' = \Lambda_1 + \beta \Lambda_2$$
$$\Lambda_2'' = \Lambda_2,$$

welche gleichfalls die Determinante 1 hat, verwandelt sich nämlich $\mathfrak{B}$ in $\mathfrak{B} + \beta\mathfrak{D}$; durch geeignete Wahl von β können wir also der angegebenen Bedingung genüge leisten.

Hiernach verstehen wir unter dem „Repräsentanten" dasjenige Parallelgitter, welches aus dem ursprüng-

lichen durch die „repräsentirende Transformation"

$$\left.\begin{array}{l} \Lambda_1 = \mathfrak{A}\omega_1 + \mathfrak{B}\omega_2 \\ \Lambda_2 = \qquad\quad \mathfrak{D}\omega_2 \end{array}\right| \mathfrak{A}\mathfrak{D} = n,\ \mathfrak{A} > 0,\ \mathfrak{D} > 0,\ 0 \leq \mathfrak{B} < \mathfrak{D}$$

hervorgeht. Die vorstehende Betrachtung zeigte, dass unter der Schaar aequivalenter Gitter *mindestens* ein Repräsentant dieser Art vorhanden ist. Dass es auch *nur einen* solchen geben kann, folgt ebenso leicht. Durch eine Transformation erster Ordnung geht nämlich Λ_1, Λ_2 über in

$$\Lambda_1' = \alpha\mathfrak{A}\omega_1 + (\alpha\mathfrak{B} + \beta\mathfrak{D})\omega_2$$

$$\Lambda_2' = \gamma\mathfrak{A}\omega_1 + (\gamma\mathfrak{B} + \delta\mathfrak{D})\omega_2 .$$

Soll hierdurch wieder ein Repräsentant gegeben sein, so muss $\gamma = 0$ sein; ferner wird, da $\alpha\delta = 1$ und $\alpha\mathfrak{A} > 0$ sein soll, $\alpha = 1$ und $\delta = 1$. Der Coefficient von ω_2 in der zweiten Gleichung wird daher gleich $\mathfrak{D}$; da

ausserdem der Coefficient von ω_2 in der ersten Gleichung kleiner als D' sein soll, so folgt nothwendig $\beta = 0$.

Die vorstehenden Betrachtungen fassen sich in den Satz zusammen:

<u>Man bekommt alle eingelagerten Punktgitter und jedes nur einmal, indem man alle Transformationen</u>

$$\Lambda_1 = A\omega_1 + B'\omega_2$$
$$\Lambda_2 = \qquad D'\omega_2$$

<u>aufschreibt, in denen A und D' positive Zahlen sind, welche im Producte n geben, und wo B' die Zahlen $0, 1, \ldots D'-1$ durchläuft.</u>

1. 5. 96.) Wir kommen nun zur Abzählung der Repräsentanten. Zunächst sei n eine Primzahl: $n = p$. Dann ist entweder $A = 1$, $D' = p$ oder $A = p$, $D' = 1$. Dementsprechend giebt es die folgenden Transformationen:

$$\left.\begin{aligned}\Lambda_1 &= \omega_1 + B'\omega_2\\ \Lambda_2 &= \qquad p\omega_2\end{aligned}\right\} B' = 0, 1, \ldots p-1 \quad \Big| \; p \text{ Transf.}$$

$$\left.\begin{aligned}\Lambda_1 &= p\omega_1 + B'\omega_2\\ \Lambda_2 &= \qquad \omega_2\end{aligned}\right\} B' = 0 \quad \Big| \; 1 \;\; "$$

im Ganzen $p+1$ Transformationen.

Wir nehmen ferner an: $n = p^2$. Wir können dann n auf dreierlei Arten zerlegen und haben:

$A = 1, D = p^2, B = 0, 1, .. p^2 - 1$	p^2 Transf.
$A = p, D = p, B = 0, 1, .. p - 1$	p ———
$A = p^2, D = 1, B = 0$	1 ———

im Ganzen $p^2 + p + 1$ Transformationen. Unter diesen befindet sich eine uneigentliche Transformation, welche in der zweiten Reihe vorkommt, nämlich $\Lambda_1 = p\omega_1$, $\Lambda_2 = p\omega_2$.

Hiernach ist das allgemeine Gesetz klar: Bedeutet n eine beliebige Zahl und $\Phi(n)$ die Theilersumme von n, so ist die Gesammtzahl aller Transformationen von der Ordnung n gleich $\Phi(n)$.

In der That kann D alle Theiler von n durchlaufen; zu jedem Werthe von D aber giebt es D Werte von B. Daher haben wir soviel Transformationen n^{ter} Ordnung, als die Summe der Theiler Einheiten enthält.

Unter diesen befinden sich jedoch auch uneigentliche Transformationen. Die Anzahl der eigentlichen wird, wie wir hier kurz angeben wollen:

$$\psi(n) = n\left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)\cdots$$

Dabei wird noch ersichtlich

$$\Phi(n) = \sum \psi\left(\frac{n}{\tau^2}\right).$$

Wenn wir nämlich n der Reihe nach von seinen quadratischen Theilern (τ) befreien und alle eigentlichen Transformationen von der Ordnung $\frac{n}{\tau^2}$ bilden, so erhalten wir in der Summe alle Transformationen von der Ordnung n.

Nach den vorstehenden Formeln können wir die folgende kleine Tabelle aufstellen:

$n =$	2	3	4	5	6	8	12	
$\psi =$	3	4	6	6	12	12	24	
$\Phi =$	3	4	7	6	12	15	28	

Vom arithmetischen Standpunkte sind die bisher besprochenen Repräsentanten die einfachsten; wir bezeichnen

sie als arithmetische Repräsentanten. Für die Zwecke der Functionentheorie nehmen wir aber besser eine kleine Änderung vor:

Es sei $n = p$. In diesem Falle lassen wir die ersten p der pg. 21 hingeschriebenen Repräsentanten ungeändert. Bei dem letzten derselben aber vertauschen wir Ω_1 mit Ω_2 und Ω_2 mit Ω_1, was auf eine Transformation 1ter Ordnung hinauskommt, so dass $\Omega_1 = -\omega_2$, $\Omega_2 = p\omega_1$ wird. Unsere $p+1$ Transformationen sind dadurch auf die gemeinsame Form gebracht:

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_1 = (\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) \\ \Omega_2 = p(\gamma\omega_1 + \delta\omega_2) \end{array}\right| \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Entsprechendes lässt sich allgemein erreichen. Sei n eine beliebige Zahl und $n = \tau^2 n'$. Alsdann kann man die Repräsentanten so umschreiben, dass

$$\left.\begin{array}{l} \Omega_1 = \tau(\alpha\omega_1 + \beta\omega_2) \\ \Omega_2 = \tau n'(\gamma\omega_1 + \delta\omega_2) \end{array}\right| \alpha\delta - \beta\gamma = 1.$$

Die in solcher Weise ausgewählten Transformationen nennen wir die functionentheoretischen Repräsentanten. Wir werden dieselben bald benutzen.

Die bisherigen Erörterungen bezogen sich auf ganz beliebige Gitter. Wir gehen nun auf „ganzzahlige Gitter" ein, d. h. auf solche, in denen a, b, c und in's Besondere

$$D = b^2 - 4ac.$$

ganze Zahlen sind. Während im allgemeinen Falle jedes Punktgitter für sich dasteht, treten, wie mehrfach betont, die ganzzahligen Gitter von gleicher Discriminante zu einem Organismus zusammen. Wir bezeichnen die Anzahl der Punktgitter gleicher Discriminante mit h oder H, je nachdem wir nur die primitiven, oder überhaupt alle Punctgitter in Rechnung bringen. Dabei besteht ersichtlich die Relation:

$$H(D) = \sum h\left(\frac{D}{\tau^2}\right),$$

unter τ einen quadratischen Teiler von D verstanden.

Wir können aus jedem dieser Gitter durch Transformation n^{ter} Ordnung $\Phi(n)$ neue Gitter erhalten, welche die Discriminante $n^2 D$ besitzen werden. Die Frage liegt nahe, ob durch Transformation n^{ter} Ordnung überhaupt alle Gitter der Discriminante $n^2 D$ aus den Gittern der Discriminante D erhalten werden. Diese Frage wird durch eine Untersuchung von Lipschitz (vergl. Crelle Bd. 53, 1867) bejaht.

Hiernach können wir bei dem Studium der ganzzahligen Gitter folgendermassen verfahren: Wir bemerken zunächst, dass jede Discriminante die Form hat: $4\nu+1$ oder 4ν. Solche Discriminanten, welche nicht durch Transformation höherer Ordnung aus kleineren Discriminanten entstehen können, bezeichnen wir nach Weber als Stammdiscriminanten. Hiernach werden Stammdiscriminanten sein Discr. von der Form $4\nu+1$, falls sie ohne quadratischen Theiler

sind und Discrim. von der Form 4ν, falls ν keinen quadratischen Theiler enthält und falls nach Forthebung der 4 eine Zahl übrig bleibt, welche keine Discriminante sein kann, d. h. eine Zahl von der Form $4\nu'+2$ oder $4\nu'+3$. Wir construiren jetzt zu allen Stammdiscriminanten die zugehörigen Gitter, welche nothwendig sämmtlich primitiv werden, so dass $h = H$ wird. Dies sind unsere „Stammgitter". In die Stammgitter lagern durch Transformation n^{ter} Ordnung neue Gitter ein, wobei wir n alle Zahlen $2, 3, 4 \dots$ durchlaufen lassen. Hierdurch kommen wir zu je $\Phi(n)$ „Zweiggittern". Auf diese Weise ergiebt sich eine systematische Aufzählung der ganzzahligen Gitter nach ihrem inneren Zusammenhange.

Wir betrachten nun die functionentheoretische Seite unseres Pro-

blems. Gegeben sei ein elliptisches Gebilde durch seine Perioden ω_1, ω_2, die Invarianten g_2, g_3 bez. die absolute Invariante J. Wir nehmen eine Transformation n^{ter} Ordnung mit den Perioden vor, durch welche sich g_2, g_3, J in g_2', g_3', J' verwandeln mögen. Es entsteht die Frage, wie diese neuen Grössen mit den alten zusammenhängen.

Zunächst handelt es sich um die Function $J(\omega)$. Da dieselbe nur von dem Periodenquotienten abhängt, so wird dieselbe durch eine blosse Multiplication der Perioden überhaupt nicht geändert. Aus demselben Grunde haben wir überhaupt nur die eigentlichen Transformationen zu berücksichtigen, indem ein etwaiger gemeinsamer Factor τ der Transformationsgleichungen für Ω_1, Ω_2 im Quotienten von selbst herausfällt. Hiernach giebt es zu jedem Werthe von J für jedes n im Ganzen $\psi(n)$ transformirte Werthe.

$\mathfrak{J}_1'$, $\mathfrak{J}_2'$, ... $\mathfrak{J}_{\psi(n)}'$,
welche die allgemeine Form haben:

$$\mathfrak{J}\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{n(\gamma\omega+\delta)}\right),$$

wo unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Werthe dieser Grössen aus den functionenth. Repräsentanten zu verstehen sind.

Die Frage ist, wie diese Werthe $\mathfrak{J}'$ mit dem gegebenen $\mathfrak{J}$ zusammenhängen.

In indirecter Weise kann man natürlich den Zusammenhang dahin definiren: Man suche zu dem gegebenen $\mathfrak{J}$ die zugehörigen Werthe des Argumentes ω, welche sämmtlich aus einem von ihnen ω_0 durch die linearen Substitutionen $\omega = \frac{\alpha\omega_0+\beta}{\gamma\omega_0+\delta}$ hervorgehen. Man bilde nun $\frac{\omega}{n}$ und behalte von den unendlich vielen Werthen von $\frac{\omega}{n}$ nur die nicht aequivalenten bei. Als solche kann man direct die $\psi(n)$ functionentheoretischen Repräsentanten wählen. Endlich bestimme man die Werthe von $\mathfrak{J}$, welche diesen $\psi(n)$ Argumenten entsprechen. So erhält

man die gesuchten Werthe J':

$$J' = J\left(\frac{\omega}{n}\right),$$

dies ist natürlich nur eine von $\psi(n)$ verschiedenen Darstellungen.

7.5.96. Wir wünschen aber den Zusammenhang in directerer Form anzugeben, indem wir, ohne auf das Argument ω_0 zu recurriren, die Werthe J' in ihrer Abhängigkeit von dem gegebenen Werthe J darstellen. In dieser Hinsicht werden wir den folgenden Satz beweisen, den wir zunächst nur für den Fall, dafs der Transformationsgrad eine Primzahl $(n = p)$ ist, aussprechen:

J' ist eine $(p+1)$-werthige irreducible algebraische Function von J.

Der Beweis stützt sich auf functionentheoretische Betrachtungen in der ω-Ebene. Wir constatiren erstens, dafs vermöge der obigen Darstellung $J' = J\left(\frac{\omega}{p}\right)$ eine eindeutige Function von ω ist.*)

*) Nimmt man $J'(J)$ in voller Allgemeinheit, indem man von irgend einem zu J gehörigen ω zu einem beliebigen $\frac{1}{n}\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ übergeht, so erhält man $\psi(n)$ getrennte eindeutige Functionen von ω nebeneinander.

Wir fragen sodann, bei welchen Substitutionen der $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$-Gruppe unser F' ungeändert bleibt. Offenbar bei allen solchen Substitutionen und nur bei solchen, welche für das Argument $\frac{\omega}{p}$ eine ganzzahlige Substitution von der Determinante 1 oder wie wir kürzer sagen, eine ganzzahlige „unimodulare" Substitution darstellen. Setzen wir also statt ω ein $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$, so müssen in

$$\frac{\alpha\omega+\beta}{p(\gamma\omega+\delta)} = \frac{\alpha\frac{\omega}{p}+\frac{\beta}{p}}{p\gamma\frac{\omega}{p}+\delta}$$

die Coefficienten von $\frac{\omega}{p}$ ganze Zahlen von der Determinante 1 sein. Hierzu ist, wie man sieht, erforderlich und hinreichend, daß

$$\beta \equiv 0 \pmod{p}$$

wird. Die Substitutionen, welche dieser Bedingung genügen, bilden eine Untergruppe der gesammten $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$-Gruppe, welche, da sie durch eine Congruenz definirt ist, als Congruenzgruppe zu bezeichnen sein wird.

Man erinnere sich jetzt, daß $J(\omega)$ nur an solchen Stellen der ω-Ebene denselben Werth annimmt, welche durch eine Substitution $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ zusammenhängen. Daraufhin können wir unser Resultat so aussprechen:

Ein und dasselbe Werthepaar (J', J) findet sich in der ω-Ebene an solchen und nur an solchen Stellen wieder, welche relativ zu der Congruenzgruppe $\beta \equiv 0 \pmod{p}$ aequivalent sind.

Wir zeichnen sodann den Discontinuitätsbereich unserer Untergruppe. Unter den durch $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ zusammengeordneten Punkten der ω-Ebene sind nur diejenigen im Sinne unserer Congruenzgruppe nicht-aequivalent, welche zu verschiedenen Werthenpaaren $(J, 'J)$ Anlaß geben. Die verschiedenen Werthe von J', welche aus einem gegebenen Werthe von $J(\omega_0)$ durch Transformation p^{ter} Ordnung entstehen, haben wir oben durch die functionentheoretischen Repräsentan-

ten characterisirt. Diese Repräsentanten sind

$$\frac{\omega_0}{p}\quad \frac{\omega_0+1}{p}\quad \frac{\omega_0+2}{p}\ ,\ \ldots\ \frac{\omega_0+p-1}{p}\ ,\ -\frac{1}{\omega_0 p}$$

Um eine möglichst symmetrische Gestalt des Discontinuitätsbereiches herauszubekommen, wollen wir dieselben lieber in folgender Weise anordnen:

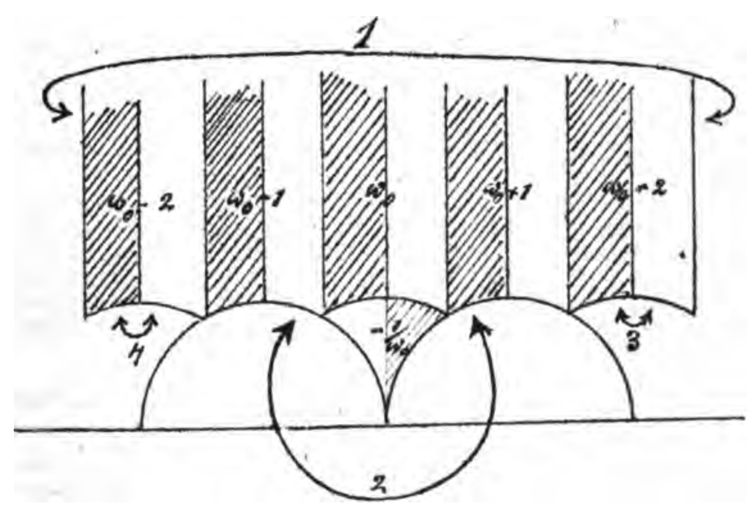
$$\frac{\omega_0-\frac{p-1}{2}}{p}\ ,\ \frac{\omega_0-\frac{p-3}{2}}{p}\ ,\ \ldots\ \frac{\omega_0-1}{p}\ ,\ \frac{\omega_0}{p}\ ,\ \frac{\omega_0+1}{p}\ ,\ \ldots$$

$$\frac{\omega_0+\frac{p-3}{2}}{p}\ ,\ \frac{\omega_0+\frac{p-1}{2}}{p}\ ,\ -\frac{1}{p\omega_0}\ ,$$

was offenbar gestattet ist, weil diese Werthe den darüberstehenden im Sinne unserer Untergruppe paarweise aequivalent sind.

Wir wollen ferner unter ω_0 speziell einen im reducirten Dreieck der ω-Ebene gelegenen Werth verstehen. Durchläuft ω_0 den ganzen reducirten Raum, so beschreiben gleichzeitig die Grössen $\omega_0+1, \omega_0-1, \ldots -\frac{1}{\omega_0}$ je ein anderes Elementardreieck der Modulthei-

lung. Die untenstehende Figur bezieht sich auf den Fall $p = 5$, den wir für das folgende zu Grunde legen wollen. Neben dem reducirten haben wir hier 5 andere Dreiecke, welche bez. die Werthe repräsentiren: ω_0+1, ω_0-1, ω_0+2, ω_0-2, $\frac{-1}{\omega_0}$. Zu irgend zwei Punkten des so entstehenden Polygones gehören verschiedene Werthe von (J, J).



Denn einerseits hat J nur in solchen sechs Punkten unseres Polygones denselben Werth, welche vermöge der Gesammtgruppe aequi-

valent sind. In allen diesen Punkten aber besitzt F' verschiedene Werthe, weil dieselben verschiedenen functionentheoretischen Repräsentanten entsprechen. Daher werden alle Punkte des Polygoninneren im Sinne unserer Untergruppe nicht-aequivalent. Umgekehrt giebt es zu jedem Punkte ausserhalb des Polygones im Innern einen Punkt, in dem sowohl F' wie F dieselben Werthe haben, wie in jenem. Daher umfasst das Polygon auch _alle_ Punkte, welche im Sinne unserer Untergruppe nicht-aequivalent sind. Mit einem Worte: _Unser Polygon ist der Discontinuitätsbereich der betrachteten Congruenzgruppe._

Dabei ist noch eine _Klausel hinsichtlich der Randpunkte_ hinzuzufügen. Die Kanten des Polygons sind durch die Substitutionen unserer Untergruppe paarweise einander zugeordnet. Streng genommen dürfen wir daher nur die

Hälfte der Begrenzung unseren Polygone hinzurechnen, während wir die andere Hälfte von der Definition des Discontinuitätsbereiches ausschliessen müssen, wie solches durch stärkeres Ausziehen in der Figur ausgedrückt ist.

Die Substitutionen, welche die Kanten zusammenordnen sind folgende: Dem Pfeile 1 entspricht offenbar die Substitution:

$$\omega' = \omega \pm 5.$$

Der Pfeil 2 bedeutet:

$$-\frac{1}{\omega'} = -\frac{1}{\omega} \pm 1 \quad \text{oder} \quad \omega' = \frac{\omega}{\mp\omega + 1}$$

Endlich gehören zu dem Pfeile 3 und 4 die folgenden Substitutionen von der Periode 2:

$$\omega' = \frac{2\omega - 5}{\omega - 2}, \quad \omega' = \frac{-2\omega - 5}{\omega + 2}$$

Dass die angegebenen Substitutionen sämmtlich zu unserer Untergruppe gehören, ist klar; dass sie die durch die Figur angegebene Kantenzuordnung leisten, rechnet man leicht

nach.

Diese Substitutionen führen das Polygon je in ein anliegendes relativ-aequivalentes über; bei Wiederholung und Combination derselben wird schliesslich die ganze w - Halbebene mit einem System analoger Polygone überdeckt. Die angegebenen Substitutionen bilden daher die Erzeugenden unserer Untergruppe einer allgemeinen Regel entsprechend, nach der die Substitutionen, welche die Kanten des Discontinuitätsbereiches zusammenordnen, allemal die erzeugenden Substitutionen der zugehörigen Gruppe darstellen.

Nachdem wir diese gruppentheoretischen Erläuterungen vorangeschickt haben, kommen wir nun zu dem specifisch functionentheoretischen Schlüssen, durch welche wir die Abhängigkeit der Werthe J' und J bestimmen wollen. Sicherlich ist J' im Falle p=5 eine sechswerthige Function von J. Um dieses Ab-

hängigkeitsverhältniß bequem über-
sehen zu können, werden wir uns die
Z-Ebene mit einer <u>sechsblätterigen
Riemann'schen Fläche</u> überdeckt
denken.

Jedem Punkte dieser Fläche ent-
spricht ein Werth des Functionenpaa-
res (Z,' Z) und umgekehrt. Andrer-
seits sahen wir, daß auch jeder Punkt
unseres Polygones ein Werthepaar
(Z,' Z) repräsentirt und umgekehrt
jeder Werthepaar (Z,' Z) einen
Punkt des Polygons bezeichnet.
Dabei sind sowohl auf der Riemann'
schen Fläche wie in unserm Poly-
gone die Werthepaare (Z,' Z) nach
dem Gesetz der Stetigkeit ausgebrei-
tet. <u>In Folge dessen sind die Punk-
te der Riemann'schen Fläche und
die Punkte des Polygones einden-
tig und stetig aufeinander bezo-
gen</u>. Polygon und Fläche sind,
wie man sagt, aufeinander
eindeutig <u>abgebildet</u>. Unser Poly-
gon liefert uns einen <u>Fundamen-</u>

talbereich für die Functionen (J', J), d. h. einen genauen Ersatz der Riemann'schen Fläche. Die sechs Blätter, welche bei der Riemann'schen Fläche übereinander liegen, sind in unserem Polygone in übersichtlicher Weise neben einander ausgebreitet; sie entsprechen nämlich einzeln den sechs Elementardreiecken, aus denen sich unser Polygon zusammensetzt. Dabei stellt unser Polygon die geschlossene oder die in zweckmäßiger Weise zerschnittene Riemann'sche Fläche dar, je nachdem wir uns seine Kanten paarweise zusammengeheftet denken oder nicht.

8. V. 96. Wir kommen nun zum Beweise der pag 37 aufgestellten Behauptungen, daß nämlich J' eine irreducible algebraische Function von J ist. Der Zusammenhang zwischen J' u. J wird ein irreducibler, wenn die Riemann'sche Fläche aus einem Stücke be-

steht; er wird ein algebraischer, wenn $\mathfrak{F}'$ auf der Riemann'schen Fläche keine wesentliche Singularität besitzt.

Was nun die Behauptung der Irreducibilität betrifft, so sieht man der Riemann'schen Fläche in der Gestalt unseres Polygones sofort an, daß sie in der That aus einem Stükke besteht. Die Sache würde nur dann anders liegen, wenn unsere Figur aus zwei verschiedenen Theilen bestände, deren Kanten einzeln unter sich zusammengeordnet wären.

Um zweitens zu zeigen, daß auf der Riemann'schen Fläche keine wesentlichen Singularitäten vorkommen, werden wir nach den allgemeinen Regeln der Functionentheorie verfahren, indem wir zeigen, daß für jeden Werth von $\mathfrak{F}\,\mathfrak{F}'$ in eine Potenzreihe entwikkelt werden kann, welche, wenn überhaupt, nur eine endliche Anzahl von negativen Potenzen

von J enthält. Übrigens wollen wir im Folgenden nicht von der Function J, sondern von $j = 1728\, J$ sprechen, weil dieselbe in arithmetischer Hinsicht vor J ausgezeichnet ist.

Unser Polygon erstreckt sich nur mit den beiden Zipfeln $\omega = 0$ und $\omega = \infty$, bis an die reelle Axe der ω-Ebene heran. Sei ω_0 zunächst ein Punkt unseres Polygons, welcher von diesen beiden Stellen verschieden ist. Die Function j ist in der Umgebung von ω_0 eine analytische Function von ω und kann daher in eine Reihe nach ganzen Potenzen von $\omega - \omega_0$ entwickelt werden. Umgekehrt lässt sich daher $\omega - \omega_0$ durch eine Potenzreihe in $j - j_0$ darstellen ($j_0 = j(\omega_0)$), in welcher keine negativen Potenzen von $j - j_0$ auftreten. Wir schreiben:

$$\omega - \omega_0 = \mathfrak{P}(j - j_0)$$

In entsprechender Weise können wir aber auch die Function $j' = j\left(\frac{\omega}{n}\right)$ an der Stelle ω_0 entwickeln. Da

nämlich der Werth $\frac{w_0}{p}$ dem Innern der positiven w-Halbebene angehört, wenn dieses für den Werth w_0 der Fall ist, so werden wir haben ($J'_0 = J(\frac{w_0}{p})$):

$$J' - J'_0 = \mathfrak{P}\left(w - \frac{w_0}{p}\right).$$

Hier brauchen wir nur den Ausdruck für w aus der vorletzten Gleichung in die letzte einzutragen, um eine Potenzreihe von der Form

$$J' - J'_0 = \mathfrak{P}(J - J_0)$$

zu erhalten; in dieser kommen negative Potenzen von $J - J_0$ überhaupt nicht vor. Hierdurch sind diejenigen Punkte unseres Polygons, welche im Innern der w-Halbebene liegen, erledigt.

Wir kommen nun zu den Stellen $w = 0$ und $w = \infty$. Hier giebt es natürlich für die Function J keine Potenzentwickelungen in w. Wohl aber haben wir bereits im vorigen Semester Entwickelungen

kennen gelernt, welche nach der Grösse

$$r = e^{2i\pi\omega}$$

fortschreiten und welche im Punkte $\omega = \infty$ bei Annäherung in der Richtung der imaginären Axe convergiren. Dieselben lauteten:

$$12\, g_2 \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^4 = 1 + 240 \sum_1^\infty \frac{m^3 r^m}{1 - r^m}$$

$$\Delta \left(\frac{\omega_2}{2\pi}\right)^{12} = r \prod_1^\infty (1 - r^m)^{24}$$

Hieraus ergiebt sich

$$J(\omega) = \frac{1728\, g_2^3}{\Delta} = \frac{1}{r} + \mathfrak{P}(r),$$

oder, wenn wir die nummerischen Werthe der ersten Coefficienten hersetzen wollen:

$$1)\quad J(\omega) = \frac{1}{r} + 744 + 196884\, r + \ldots$$

Die entsprechende Reihe für J' erhalten wir, wenn wir bei unserem Beispiele $p = 5$ bleiben, da

durch, dass wir ω mit $\frac{\omega}{5}$, also r mit $r^{1/5}$ vertauschen. Daher wird

1') $j'(\omega) = \frac{1}{r^{1/5}} + 744 + 196884\, r^{1/5} + \ldots$

Jenachdem wir $\frac{\omega}{5} = \frac{\omega_0}{5}, \frac{\omega_0 \pm 1}{5}, \frac{\omega_0 \pm 2}{5}$ nehmen, werden hier die fünf verschiedenen Werthe von $r^{1/5}$ in Geltung kommen.

Aus dem Punkte $\omega = \infty$ geht der Punkt $\omega = 0$ hervor, wenn wir $-\frac{1}{\omega}$ an die Stelle von ω treten lassen; dabei geht r über in

$$r' = e^{-\frac{2\pi i}{\omega}},$$

während j bei dieser Substitution nicht geändert wird. Die zusammengehörigen Reihenentwickelungen im Punkte $\omega = 0$ lauten daher:

2) $j(\omega) = \frac{1}{r'} + 744 + 196884\, r' + \ldots$

2') $j'(\omega) = \frac{1}{r'^5} + 744 + 196884\, r'^5 + \ldots$

Nun können wir aus den Reihen 1) bez. 2) r bez. r' durch eine Reihe darstellen, die nach Potenzen von $\frac{1}{j}$ fortschreitet und positive Exponenten aufweist.

Tragen wir diese Reihen in 1') bez. 2') ein, so erhalten wir eine Darstellung von j', aus welcher hervorgeht, daß j' auch in den Punkten der Riemann'schen Fläche, welche den Werthen $w = \infty$ und $w = 0$ entsprechen, keine wesentliche Singularität besitzt. *In Folge dessen hat j' auf der Riemann'schen Fläche überhaupt keinen wesentlich singulären Punkt und stellt in der That eine algebraische Function von j dar.*

Das somit abgeleitete Resultat können wir auch folgendermassen formuliren: Wir bilden die sog. „*Transformationsgleichung*"

$$F(j', j) = (j' - j'_1)(j' - j'_2) \cdots (j' - j'_{p+1}) = 0,$$

von welcher die Bestimmung der zu einem gegebenen j gehörigen transformirten Werthe j' abhängt. In ausgerechneter Form lautet sie:

$$j'^{\,p+1} + a_1 j'^{\,p} + \cdots a_{p+1} = 0.$$

Hier sind nun die Coefficienten

a als symmetrische Function von $j' \dots j'_{p+1}$ in j eindeutig; da sie überdies in j algebraisch sind, so werden sie eindeutige algebraische, d. h. rationale Functionen von j. Wir erkennen also, dass für j' eine in j rationale irreducible algebraische Gleichung $p+1^{ten}$ Grades besteht.

Übrigens liefert unsere Schlussweise, welche von den Figuren in der w-Ebene ausging, mehr als die blosse Existenz dieser Transformationsgleichung. Sie giebt gleichzeitig die Verzweigungspunkte der zugehörigen Riemann'schen Fläche an und die Art, wie die Blätter in den Verzweigungspunkten zusammenhängen. Vergl. hierzu Modulf. II pg 36-62; an gegenwärtiger Stelle können wir dies nicht weiter verfolgen.

Wir betonen, dass wir vorstehend zu der Transformationsgleichung nicht sowohl durch Rechnung als vielmehr durch eine Reihe von Ueberlegungen u. zw. auf directestem Wege gelangt sind.

Gewöhnlich verfährt man weniger direct, indem man von der Theilungsgleichung der elliptischen Functionen ausgeht, wobei die Transformationsgleichung als Resolvente der Theilungsgleichung erscheint. Diesen Weg der übrigens nach anderer Seite Vortheile bietet, konnten wir hier schon deshalb nicht einschlagen, weil wir uns ja ausschliesslich auf Modulfunctionen beschränken müssen.

Wir handeln nun specieller von der Gleichung

$$\underline{F(J', J) = 0}$$

und geben in Kürze eine Reihe von Sätzen über die Coefficienten derselben, wobei wir uns an das Buch von Weber: Elliptische Functionen: (vergl. pg. 250 u. ff.) anschliessen werden.

1. <u>Die Coefficienten $a_1, a_2, \ldots$ unserer Gleichung sind nicht nur rationale sondern auch ganze Functionen von J.</u> Der Grund hier-

von liegt darin, dass J' und daher auch die symmetrischen Functionen der verschiedenen J' nur dann unendlich werden können, wenn J selbst unendlich wird, wie aus den Reihen von pg. 51 hervorgeht.

2. Bei einer Vertauschung von J und J' bleibt die linke Seite unserer Gleichung ungeändert. Wir bemerken nämlich, dass die Transformation p^{ter} Ordnung, sofern wir nur die Periodenquotienten ω, ω' in Betracht ziehen, eine wechselseitige Operation ist. Die Beziehung zwischen ω und ω' können wir unserem $p+1^{ten}$ Repräsentanten entsprechend allemal auch in der Form

$$\omega' = -\frac{1}{\omega p} \quad \text{oder} \quad \omega\omega' = -\frac{1}{p}$$

ausdrücken; dabei müssen wir nur ω nicht auf den reducirten Raum beschränken, sondern eine geeignete Reihe von $p+1$ Dreiecken durchlaufen lassen. Aus der vorstehenden symmetrischen Schreib-

weise folgt, dass wenn j' aus j durch Transformation p^{ter} Ordnung hervorgeht, auch umgekehrt j aus j' auf dieselbe Weise erzeugt werden kann. Hiernach wird die Transformationsgleichung $F(j', j) = 0$ ungeändert bestehen bleiben, wenn wir j und j' vertauschen. Wir haben daher:

$$F(j', j) = C\,F(j, j').$$

Durch Wiederholung der Vertauschung $j \sim j'$ kommen wir zu

$$F(j', j) = C^2 F(j', j), \text{ d.h. } C^2 = 1,\ C = \pm 1.$$

Der Werth $C = -1$ ist auszuschliessen, denn er würde zur Folge haben, dass für $j' = j$ $F(j, j) = -F(j, j) = 0$ sein müsste, dass also $F(j', j)$ den Teiler $j' - j$ besässe, was wegen der Irreducibilität von F unmöglich ist. Mithin bleibt nur $C = +1$ übrig, d. h. die linke Seite unserer Gleichung bleibt bei Vertauschung von j und j' gänzlich unge-

ändert.

Man bemerke übrigens, dass die genannte Eigenschaft durchaus an dem Umstande haftet, dass J eine Modulfunction ist und als solche nur von dem Quotienten $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ abhängt. Üben wir die Transformation p^{ter} Ordnung an den Perioden selbst aus, so haben wir bei Zugrundelegung desselben Repräsentanten, wie oben:

$$\omega_1' = -\omega_2$$
$$\omega_2' = p\omega_1 .$$

Diese Operation ist nicht in ω und ω' symmetrisch; sie führt bei Wiederholung daher nicht zur Identität zurück. Vielmehr ergiebt sich, wenn wir noch zweitens hinzunehmen.

$$\omega_1'' = -\omega_2'$$
$$\omega_2'' = p\omega_1' ,$$

zwischen ω'' und ω eine gewöhnliche Multiplication mit $-p$, nämlich

$$\omega_1'' = -p\omega_1$$
$$\omega_2'' = -p\omega_2 .$$

Hier kommt man also wie schon Jacobi bemerkt hat, durch Wiederholung der Transformation zu einer Multiplication.

3. Die nummerischen Coefficienten von $J'^{\alpha} J^{\beta}$ werden sämmtlich ganze Zahlen. Die Anzahl der möglichen nummerischen Coefficienten ist von vornherein begrenzt. Auf Grund des Satzes 2 kann nämlich jeder der Coefficienten a_i höchstens bis zum $p+1$ten Grade in J ansteigen. Man kann daher die Grössen a_i mit unbestimmten Coefficienten ansetzen, z. B.

$$a_1 = \alpha_{1,0} + \alpha_{11} J + \alpha_{12} J^2 + \ldots \alpha_{1,p+1} J^{p+1},$$

und diese durch Eintragen der Reihenentwickelungen von J' und J'' berechnen. Die Ganzzahligkeit folgt dann aus dem Gesetz der Reihenentwickelungen nach Potenzen von x; die Einzelheiten vergl. bei Weber.

Das einzige ausgerechnete

59.

Beispiel einer Transformationsgleichung verdanken wir Stephen Smith; derselbe berechnete im Falle $p=3$ die folgende Relation, in welcher zur Abkürzung $j' = 256x$, $j = 256y$ gesetzt ist:

$$x(x+2^7\cdot 3\cdot 5^3)^3 + y(y+2^7\cdot 3\cdot 5^3)^3 - 2^{16}x^3y^3 - 2^{15}\cdot 5^6\cdot 22973\,xy$$

$$+2^4\cdot 3^2\cdot 31\,x^2y^2(x+y) - 2^2 3^3\, 9907\,xy(x^2+y^2)$$

$$+2\cdot 3^4\cdot 13\cdot 193\cdot 6367\,x^2y^2 + 2^8 3^5 5^3\, 4471\,xy(x+y) = 0.$$

An diesem Beispiel bewähren sich unsere bisherigen allgemeinen Regeln; wir erkennen aber zugleich, dass wir bei grösseren Werthen des Transformationsgrades zu ganz ungeheuerlichen Relationen geführt werden.

15. V. 96. 4. Die Coefficienten haben aber eine weitere arithmetische Eigenschaft, die wir erwähnen müssen. Man kann nämlich der Transformationsgleichung die Form geben:

$$(j'^p - j)(j^p - j') + \sum_0^p{}_h \sum_k c_{hk}(j'^h j^k + j'^k j^h) + \sum_0^{p-1} c_{hh} j'^h j^h = 0.$$

<u>Hier werden sämmtliche c_{hk} ganze durch p theilbare Zahlen.</u> Der Beweis wird mit Hülfe der oben genannten Reihenentwickelungen von j' nach der Hülfsgrösse r geführt. Wir verweisen deshalb auf Weber, Ellipt. Fu. pg. 253–254.

Wenn man daher die Transformationsgleichung modulo p betrachtet, so reducirt sich ihre linke Seite einfach auf das Product:

$$(j'^p - j)(j^p - j').$$

5. Ist der Grad der Transformation keine Primzahl, sondern eine <u>beliebige zusammengesetzte Zahl</u>, so tritt, was den Grad der Transformationsgleichung betrifft, die zahlentheoretische Function $\psi(n)$ an die Stelle von $p+1$. Im Übrigen bleiben die sub 2 und 3 genannten Eigenschaften ungeändert bestehen.

Gegenüber dem bisher eingehaltenen Standpunkte, auf welchem wir die Transformationsgleichung voranstellten, giebt es einen höheren Standpunkt, von dem aus man die Gesammtheit der in z und z' rationalen Functionen in's Auge fasst. Man bezeichnet diese Gesammtheit als den Körper (z', z). Wir werden daher in Zukunft diesen Körper betrachten, aus den Functionen dieses Körpers die einfachsten aussuchen und deren algebraischen Zusammenhang mit z entwickeln. Hinterher werden wir dann die Grösse z' in rationaler Form durch diese einfachsten Functionen darstellen können.

Der moderne Ausdruck „Functionenkörper" ist im Grunde identisch mit dem, was man gewöhnlich eine „Riemann'sche Fläche" nennt. In der That ist die Gesammtheit der Functionen des Körpers im vorliegenden Falle nichts anderes als die Gesammtheit der auf der Rie-

mann'schen Fläche (J', J) eindeutigen und regulären Functionen. Die Beziehung auf die Riemann'sche Fläche ist für uns deshalb von Vortheil, weil wir diese in der Gestalt unseres Kreisbogenpolygons bequem übersehen können. Aus diesem Grunde wird auch in dem Buche über Modulf. die Terminologie der Riemann'schen Fläche festgehalten. Der Begriff des Körpers hat aber in anderer Hinsicht seine Vorzüge. Man kann nämlich den Functionen des Körpers die Bedingung auferlegen, dass sie nur ganzzahlige Coefficienten haben sollen. Diese Verschärfung des Begriffes lässt sich in dem Bilde der Riemannischen Fläche nicht gut durchführen.

Wir könnten nun, von den niedersten Fällen beginnend, an der Hand unserer Figuren die Functionen des Körpers (J', J) discutiren. Statt dessen werden wir hier lieber einen allgemeinern Weg

einschlagen, welcher indirect zu dem oben bezeichneten Ziele führt.

Wir betrachten statt der absoluten Invariante J die Invarianten g_2, g_3, Δ. Bei der Transformation n^{ter} Ordnung mögen diese übergehen in

$$g_2' = g_2(a\omega_1 + b\omega_2, c\omega_1 + d\omega_2),\ g_3',\ \Delta'.$$

Um zu Modulfunctionen zurückzugelangen, bilden wir

$$\frac{g_2'}{g_2},\ \frac{g_3'}{g_3},\ \frac{\Delta'}{\Delta},$$

welche Ausdrücke ersichtlich nur von dem Quotienten $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \omega$ abhängen werden. Es zeigt sich sofort dass diese Grössen, ebenso wie J', $\psi(n)$ verschiedene Werthe besitzen, auf der Riemann'schen Fläche eindeutig sind und keine wesentlichen Singularitäten haben. Auf den Beweis gehen wir nicht weiter ein. Wir constatiren aber, dass die genannten Grössen in Folge dessen rationale Functionen von J' und J sein

werden und dass sich J' umgekehrt durch J und eine der genannten Functionen rational darstellen lässt. Es giebt aber noch <u>einfachere Functionen</u>, als die genannten, welche gleichfalls unserem Körper angehören, nämlich gewisse Wurzeln derselben. Wir bezeichnen

$$\sqrt[n]{\frac{\Delta'}{\Delta}}$$

mit M (Multiplicator); auf den Grund dieser Benennung kommen wir später zurück. Dass diese Grösse, falls sie unserem Körper angehört, eine einfachere algebraische Function als $\frac{\Delta'}{\Delta}$ ist, ist klar. Denn die algebraische Gleichung, welcher M^n genügt und welche aus der algebraischen Gleichung für M leicht abgeleitet werden kann, hat jedenfalls eine complicirtere Gestalt wie die letztere.

Die in jedem Fall zu benutzende einfachste Function, welche noch

in unserem Körper liegt, geben wir in der folgenden Zusammenstellung an. Dabei beschränken wir uns auf solche Transformationsgraden, welche nicht durch 2 oder durch 3 theilbar sind. Es geschieht dies um nicht zu viele Fallunterscheidungen machen zu müssen. Wir haben daraufhin modulo 12 folgende vier Fälle zu unterscheiden:

$$n \equiv 1, \quad 5, \quad 7, \quad 11 \pmod{12}$$

$$n\sqrt[12]{\frac{\Delta'}{\Delta}} = M, \quad n^3\sqrt[4]{\frac{\Delta'}{\Delta}} = M, \quad n^2\sqrt[6]{\frac{\Delta'}{\Delta}} = M, \quad n^6\sqrt{\frac{\Delta'}{\Delta}} = M$$

Eine Ausnahmestellung nimmt der Fall ein, wo n eine Quadratzahl ist. Eine Quadratzahl, welche weder durch 2 noch durch 3 theilbar ist, muss immer $\equiv 1 \pmod{12}$ sein. Für ein solches n liegt nicht nur die 12te, sondern sogar die 24te Wurzel von $\frac{\Delta'}{\Delta}$ in unserem Körper. Daher wird in diesem

Falle die einfachste Function:

$$\text{Vn.} \sqrt[24]{\frac{\Delta'}{\Delta}} = \sqrt{H}$$

Die angegebene Unterscheidung zwischen den verschiedenen Fällen können wir vermeiden, wenn wir unsern Rationalitätsbereich ein wenig erweitern. Wir wollen nicht nur J, sondern nach Bedarf auch noch die folgenden einfachen algebraischen Functionen von J als rational bekannt ansehen:

$$\gamma_2 = \sqrt[3]{J} = \frac{12 g_2}{\sqrt[3]{\Delta}}, \quad \gamma_3 = \sqrt{J-1728} = \frac{216 g_3}{\sqrt{\Delta}}$$

(in denen natürlich J selbst rational darstellbar ist).

Nach Erweiterung des Rationalitätsbereiches wird sich der Kreis der in unserem Körper befindlichen Functionen vergrössert haben

<u>Es zeigt sich, daß nunmehr H</u>

in allen Fällen zu unserem Körper gehört, d.h. einer Gleichung vom Grade $\psi(n)$ mit Coefficienten, die in J, γ_2 und γ_3 rational sind, genüge leistet.

U. zw. haben wir zu dem Ende im Falle $n \equiv 5 \pmod{12}$: γ_2, im Falle $n \equiv 7$: γ_3, im Falle $n \equiv 11$ sowohl γ_2 als γ_3 zu dem ursprünglichen Rationalitätsbereich zu adjungiren; im Falle $n \equiv 1$ ist natürlich eine solche Adjunction überflüssig. Es soll daher unser Rationalitätsbereich in den Fällen

$$n \equiv 1, \quad n \equiv 5, \quad n \equiv 7, \quad n \equiv 11 \ (12)$$

aus den Functionen bestehen:

$$J, \qquad \gamma_2, \quad \gamma_3, \quad \gamma_2, \gamma_3.$$

Der Vorzug des „Multiplicators" M gegenüber der Grösse J' besteht in der grösseren Einfachheit der algebraischen Gleichung, durch welche M bestimmt wird. Wir nennen diese Gleichung „*Multiplicatorgleichung*"; sie lautet in den niedrigsten Prim-

zahl-Fällen, soweit sie nicht durch unsere obige Beschränkung ausgeschlossen sind:

$$n=5 \qquad M^6 + 10M^3 - g_2 M + 5 = 0$$

$$n=7 \qquad M^8 + 14M^6 + 63M^4 + 70M^2 + g_3 M - 7 = 0$$

$$n=11 \qquad M^{12} - 990M^6 + 440 g_2 M^4 - 165 M^3 + 22 g_2^2 M^2 - g_2 g_3 M - 11 = 0.$$

In diesen Gleichungen kommt das, was soeben über den Rationalitätsbereich gesagt ist, zur Geltung. Wir bemerken an ihnen ferner die folgende Regelmässigkeit, welche für einen Primzahlgrad $n=p$ allgemein gilt: *Alle Coefficienten der Gleichung mit Ausnahme des vorletzten sind durch p theilbar; der letzte Coefficient ist gleich $\pm p$, je nachdem $p \equiv \pm 1 \pmod 4$.*

21.V.96. Historische Notizen über die Multiplicatorgleichung finden sich Modulf. II pg. 81. Wir erwähnen hiervon zunächst, was sich auf

Schläfli beschäftigt sich in Crelle Bd. 72, 1870 mit der Transformation des Moduls 48ter Stufe

$$\sqrt[24]{\lambda(\lambda-1)} = \sqrt[12]{Kk'},$$

welcher bemerkenswerthe einfache Resultate liefert, worauf insbesondere Weber in seinem Buche zurückgekommen ist. Da 48 die Primfactoren 2 und 3 enthält, sind hier die geraden und die durch 3 theilbaren Transformationsgrade besonders zu behandeln.

In dieser Vorlesung werde ich indessen die Transformationstheorie des Moduls $\zeta(\omega)$, d. h. der Ikosaederirrationalität bevorzugen, ohne darum behaupten zu wollen, dass dieser Modul interessanter ist als andere. Es ist mehr, dass ich wünsche, die Ikosaederirrationalität $\zeta(\omega)$ nach allen Richtungen zur Geltung zu bringen, und dass ich der allgemeinen Untersuchung der höheren Moduln einen neuen An-

stoss geben möchte.

Die Grösse $Z(\omega)$ ist wie wir wissen, Hauptmodul der fünften Stufe. Nun zerfallen Modulo 5 die $\left(\begin{smallmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{smallmatrix}\right)$ Substitutionen in 60 Klassen. Zwischen J und ζ besteht daher eine Gleichung 60ten Grades $J = R_{60}(\zeta)$, die sog. Ikosädergleichung, die wir schon oben angaben, ihre Wurzeln drücken sich linear durch eine aus. Wir schreiben die 60 Wurzeln in dem folgenden Schema zusammen, in welchem $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{5}}$ ist (Vergl. Ikosaeder pag. 43):

$$\varepsilon^{\mu}\zeta\,, \qquad -\frac{\varepsilon^{\mu}}{\zeta}$$

$$\varepsilon^{\mu}\cdot\frac{-(\varepsilon-\varepsilon^{4})\varepsilon^{\nu}\zeta+(\varepsilon^{2}-\varepsilon^{3})}{(\varepsilon^{2}-\varepsilon^{3})\varepsilon^{\nu}\zeta+(\varepsilon-\varepsilon^{4})}\,, \qquad \varepsilon^{\mu}\cdot\frac{(\varepsilon^{2}-\varepsilon^{3})\varepsilon^{\nu}\zeta+(\varepsilon-\varepsilon^{4})}{(\varepsilon-\varepsilon^{4})\varepsilon^{\nu}\zeta+(\varepsilon^{2}-\varepsilon^{3})}.$$

Geben wir hierin μ und ν die Werthe 1, 2, 3, 4, 5, so stellt die erste Zeile 2×5, die zweite 2×25 Werthe dar. Im Ganzen haben wir hier die 60 Wurzeln der Ikosaedergleichung vor uns.

Wir haben hier vor allen Dingen

Wir werden jetzt die ganze Fragestellung verallgemeinern, indem wir eine Transformationstheorie bei beliebiger Stufenzahl entwickeln. Hiervon handelt ein besonderes Capitel der Modulf. (Bd. II, Cap. 3)

Es sei $\varphi(\omega)$ eine Modulfunction etwa von der r^{ten} Stufe. Bei einer Transformation n^{ter} Ordnung geht dieselbe über in $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$. Hier entsteht nun die Aufgabe, den algebraischen Zusammenhang zwischen $\varphi\left(\frac{\omega}{n}\right)$ und $\varphi(\omega)$ in ähnlicher Weise zu untersuchen, wie es mit der algebraischen Beziehung zwischen $J\left(\frac{\omega}{n}\right)$ und $J(\omega)$ geschehen ist.

Das allgemeine Resultat, welches sich in dieser Hinsicht ergiebt, lautet folgendermassen:

Solange r und n relativ prim sind, liegt alles ähnlich wie bei den Functionen der 1ten Stufe. Besonderheiten treten nur auf, wenn r und n einen Theiler gemein

haben. In allen Fällen aber sind die beiden Moduln durch eine algebraische Gleichung verbunden.

Hierzu zunächst einige Beispiele aus der vorhandenen Litteratur. Die sog. „Modulargleichung", welche in der Jacobi'schen Theorie vorkommen, liefern den algebraischen Zusammenhang zwischen dem Modul

$$\sqrt[8]{\lambda(\omega)} = \sqrt[4]{k}$$

und den durch Transformation n^{ter} Ordnung aus ihm entstehenden Grössen. Der hier betrachtete Modul ist von der 16ten Stufe. Nach der obigen allgemeinen Bemerkung hat man daher zwischen geradem und ungeradem n zu unterscheiden. Für ein ungerades n wird die Theorie der Jacobi'schen Modulargleichung ganz ähnlich ausfallen, wie die Theorie der Gleichung $F(J', J)$.

Ferner erwähnen wir die sogen. Schläfli'schen Modulargleichung

Arbeit:

Kiepert, Math. Ann. Bd. 26, 1885. Kiepert geht von dem sog. speciellen Theilungsproblem der elliptischen Functionen aus. Die Grösse M, (für welche K. übrigens L^2 sagt) erscheint bei ihm durch die Wurzeln der Theilungsgleichung

$$\wp\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right),\ \wp'\left(\frac{\lambda\omega_1+\mu\omega_2}{n}\right)$$

ausgedrückt. Die Multiplicatorgleichung wird so zu einer Resolvente der Theilungsgleichung. Unter den reichhaltigen Details der Kiepert'schen Arbeiten heben wir in's Besondere hervor, daſs hier die Darstellung der Grössen g_2', g_3' bez. J' durch M, sowie durch die (als rational bekannt anzusehenden) Grössen g_2, g_3 bez. J gegeben wird. Es ist dieses die Ausführung zu einer Bemerkung, welche wir auf pg. 61 machten, wonach man unter den Grössen

des Körpers (J', J) möglichst einfache (eben unser M.) aufsuchen und durch diese sowie durch die rational bekannten Grössen alle übrigen darstellen sollte. Diese Darstellung wird von Kiepert explicite geleistet.

In dem Buche von Weber wird die Gleichung für M als „invariante Multiplicatorgleichung" bezeichnet, weil die Grösse M mit den „Invarianten" g_2, g_3 zusammenhängt. Diese Bezeichnung scheint uns nicht zweckmässig. Will man die Multiplicatorgleichung für M von anderen Multiplicatorgleichungen, wie solche ja in der Jacobi'schen Theorie vorkommen, unterscheiden, so sollte man sie als Multiplicatorgleichung 1ten Stufe bezeichnen; denn auch die Jacobi'sche Multiplicatorgleichung bleibt bei gewissen ω-Substitutionen invariant, nur nicht bei den Substitutionen der 1ten, sondern bei denen der 2ten Stufe.

die Bezeichnung „Multiplicator" bezieht. Die Grösse M. tritt in dieser Hinsicht zum ersten Male auf bei Klein, Math. Ann. Bd. 14, 1878, u. zw. bei der Transformation der elliptischen Integrale in der Weierstraßischen Normalform. Offenbar ist das Weierstrassische Integral

$$\int \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}$$

homogen von der + 1ten Dimension in ω_1, ω_2. Um es zu einer Grösse 0ter Dimension zu machen, kann man $\sqrt{\Delta}$ als Factor hinzufügen. Darauf werden wir es als „normirtes Weierstrassischen Integral" bezeichnen.

In der Transformationstheorie vergleicht man nun zwei Weierstraßische Integrale, wobei direct

$$\int \frac{dp'}{\sqrt{4p'^3 - g_2' p' - g_3'}} = \int \frac{dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}},$$

Will man aber normirte Integrale betrachten, so wird man die vorher-

gehende Gleichung durch die folgende, übrigens genau dasselbe besagende, ersetzen:

$$\int \frac{\sqrt[12]{\Delta'} \cdot dp'}{\sqrt{4p'^3 - g_2' p' - g_3'}} = \frac{M}{n} \int \frac{\sqrt[12]{\Delta}\, dp}{\sqrt{4p^3 - g_2 p - g_3}}.$$

<u>Hier sehen wir, spielt die Grösse $\frac{M}{n}$ die Rolle eines Multiplicators</u>; sie tritt an die Stelle desjenigen Multiplicators, welcher in der älteren Theorie bei der Transformation der Jacobi'schen Normalintegrale vorkommt.

Die Eigenschaften der Multiplicatorgleichung werden vom Standpunkte der Modulfunctionen, d.h. durch Betrachtungen in der w-Ebene, begründet in der grossen Arbeit von <u>Hurwitz</u>, Math. Ann. Bd. 18, 1881.

Von anderer Seite ist <u>Kiepert</u> zu der Multiplicatorgleichung gekommen, man vergleiche ins Besondere die zusammenfassende

zu constatiren, daß die Coefficienten der angeschriebenen Substitutionen nicht im natürlichen, sondern in dem durch die 5te Einheitswurzel erweiterten Rationalitätsbereiche liegen. Daher können wir die Ikosaedergleichung nur dann als Galois'sche Gleichung bezeichnen, wenn wir diese Einheitswurzel adjungiren.

Das Hereinspielen der Zahlenirrationalität ε ist für uns besonders interessant. Wir werden uns später darüber klar werden müssen, welche Folgen dieser Umstand für die Theorie der singulären elliptischen Gebilde hat, nämlich für denjenigen von uns zu entwickelnden Theil dieser Theorie, der sich mit der Ikosaederirrationalität $\zeta(\omega)$ beschäftigt.

22.V.96. Um Anschluß an die Formentheorie zu gewinnen, werden wir die Ikosaedergleichung homogen machen, indem wir setzen $\zeta = \zeta_1/\zeta_2$; sie lautet dann:

$$J : J-1 : 1 = H^3(\zeta_1, \zeta_2) : -T^2(\zeta_1, \zeta_2) : 1728 f^5(\zeta_1, \zeta_2)$$

Die Formen H, T und f, welche bez. von der 20ten, 30ten und 12ten Dimension sind, haben ein einfaches Bildungsgesetz. Nennen wir f die Grundform, so wird nämlich H die Hesse'sche Form von f und T die Functionaldeterminante von f und H. Man erkennt hier den Nutzen der homogenen Variabeln. Übrigens haben wir

$$f = \zeta_1 \zeta_2 (\zeta_1^{10} + 11 \zeta_1^5 \zeta_2^5 - \zeta_2^{10})$$

Ebenso wie die Variable ζ werden wir auch die Substitutionen von ζ homogen spalten. Wir richten es so ein, daß die entstehende binäre Substitution die Determinante 1 erhält und sprechen dann von einer <u>unimodularen binären Substitution</u>. Z. B. erreichen wir dieses bei der Substitution

$$\zeta' = \varepsilon\zeta$$

dadurch dass wir setzen

$$\zeta_1' = \pm\varepsilon^3\zeta$$
$$\zeta_2' = \pm\varepsilon^2\zeta_2.$$

Bei dieser Spaltung bleibt nothwendiger Weise ein Vorzeichen unbestimmt, so dass sich die Zahl der Substitutionen von 60 auf 120 vergrössert. Ebenso wie die nicht-homogene Ikosaedergleichung bei den pg 75 angegebenen 60 nicht-homogenen Substitutionen von ζ, bleibt die homogen-gemachte Ikosaedergleichung und sogar die einzelne Form f, H und T bei den 120 homogenen unimodularen Substitutionen von ζ_1, ζ_2 ungeändert.

Wir kommen nun zu der Transformationstheorie des Moduls $\zeta(\omega)$. Dieselbe ist ausführlich von Friedrich in seiner Dissertation, Leipzig 1886 behandelt. Vergl. andererseits Modulf. II pg 150. Setzen wir den Transformationsgrad

zu 5 relativ prim voraus, so bekommen wir ganz ähnliche Resultate wie pag. 28 für die 1te Stufe.

1. Zunächst wissen wir, dass

$$\xi = \mathfrak{f}(\omega)$$

bei den Substitutionen der Hauptcongruenzgruppe 5ter Stufe und bei keinen anderen Umänderungen von ω ungeändert bleibt. Wir wollen dieselben durch die Schreibweise

$$\omega' = \frac{\mathfrak{A}\omega + \mathfrak{B}}{\mathfrak{C}\omega + \mathfrak{D}} \quad \begin{pmatrix} \mathfrak{A} \equiv \mathfrak{D} \equiv 1 \ (\text{mod. } 5) \\ \mathfrak{B} \equiv \mathfrak{C} \equiv 0 \ (\text{mod } 5) \end{pmatrix}$$

kenntlich machen.

2. Sodann fragen wir, bei welchen dieser Substitutionen die transformirte Grösse

$$\xi' = \mathfrak{f}\left(\frac{\omega}{n}\right)$$

ungeändert bleibt. Wir können unsere Substitution ersichtlich so schreiben:

$$\frac{\omega'}{n} = \frac{\mathfrak{A}\left(\frac{\omega}{n}\right) + \frac{\mathfrak{B}}{n}}{\mathfrak{C}n\left(\frac{\omega}{n}\right) + \mathfrak{D}}$$

und erkennen sofort, dass $\mathfrak{Z}\left(\frac{\omega}{n}\right)$

ungeändert bleibt, wenn nur $\frac{B'}{n}$ eine ganze Zahl ist. Dieselbe Bedingung haben wir pg. 39 bei der Transformation von F kennen gelernt. Das Besondere ist hier nur, dass B' von vornherein bereits der Congruenz $B' \equiv 0 \pmod 5$ genügt. Es ist nun verständlich, dass diese beiden Congruenzen in keiner Weise collidiren, sofern wir n relativ prim zu 5 voraussetzen, wie wir esthaten, und das weiterhin eine ganz ähnliche Transformationstheorie herauskommt, wie auf der 1ten Stufe.

3. Wir bestimmen jetzt den Index derjenigen Untergruppe, welche aus der Hauptcongruenzgruppe 5ter Stufe durch die Bedingung

$$B' \equiv 0 \pmod n$$

ausgesondert wird. Derselbe ergiebt sich wie früher zu

$$\psi(n) = \left(1+\frac{1}{p}\right)\left(1+\frac{1}{q}\right)\cdots$$

Die Substitutionen $\begin{pmatrix} A & B' \\ C & D' \end{pmatrix}$ zer-

fallen also für uns in $\Psi(n)$ Classen. Zu jeder Classe können wir wie früher einen Repräsentanten wählen etc. etc.

4. Dementsprechend besteht der Fundamentalbereich unserer Untergruppe aus $\Psi(n)$ Einzelbereichen, d.h. hier aus $\Psi(n)$ Ikosaedernetzen, deren jedes seinerseits aus 60 Doppeldreiecken der ursprünglichen Modultheilung besteht.

5. Der nächste Schritt wird der sein, dass wir das Verhalten von $\zeta'(\omega)$ und $\zeta(\omega)$ in dem genannten Fundamentalbereiche durch Aufstellen von Reihenentwickelungen in ähnlicher Weise wie pg. 49 untersuchen. Dabei zeigt sich, dass ζ und ζ' relativ zum Fundamentalbereiche keine wesentliche Singularitäten haben.

6. Mithin besteht zwischen ζ und ζ' eine algebraische Relation, welche wir vorläufig so schreiben wollen:

$$f_1(\xi', \xi) = 0.$$

Sie ist vom Grade $\psi(n)$ in jeder der beiden Variabeln, besitzt ganzzahlige Coefficienten etc. Wir bezeichnen sie als <u>Transformationsgleichung n^{te} Ordnung der Ikosaederirrationalität</u>.

Nun wäre die Frage, wie wir diese Gleichung wirklich aufstellen können. Zunächst möchte es scheinen, daß dieses im jetzigen Falle noch umständlicher sein wird, wie im Falle der Transformationsgleichung bei Zugrundelegung des j. In Wirklichkeit aber geht es viel einfacher.

Der Grund hiervon liegt in den <u>besonderen algebraischen Eigenschaften unserer Gleichung</u>, welche sich aus der Betrachtung der ω-Ebene ergeben. Wir lassen ω von einem Anfangswerthe aus in andere vermöge der Gesammtgruppe aequivalente Werthe über-

gehen. Dabei erleidet $\xi(\omega)$ die sämmtlichen 60 Ikosaedersubstitutionen, sofern wir nur auf ω aus jeder der modulo 5 unterschiedenen 60 Classen von Substitutionen mindestens eine ausüben. Wir thun dieses, indem wir die folgenden Substitutionen betrachten ($\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen von der Determinante 1):

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta n}{\gamma\omega + \delta}$$

Dieselben enthalten in der That, da n zu 5 relativ prim ist, Substitutionen aus allen 60 Classen unter sich. Mithin haben wir

$$\xi\left(\frac{\alpha\omega + \beta n}{\gamma\omega + \delta}\right) = S(\xi),$$

wo $S(\xi)$ eine Ikosaedersubstitution bedeutet u. zw. jede beliebige, wenn wir $\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$ geeignet verändern.

Zu gleicher Zeit erleidet aber auch $\xi'(\omega)$ eine Ikosaedersubstitution. Wir haben nämlich:

$$\zeta\left(\frac{1}{n}\frac{\alpha\omega+\beta n}{\gamma\omega+\delta}\right) = \zeta\left(\frac{\alpha\frac{\omega}{n}+\beta}{\gamma n\cdot\frac{\omega}{n}+\delta}\right) = S'(\zeta'),$$

unter S' wieder eine geeignete Ikosaedersubstitution verstanden.

Wenn also ζ übergeht in $S(\zeta)$, wobei die Substitution S dem Schema entspricht: $\begin{pmatrix}\alpha & \beta n\\ \gamma & \delta\end{pmatrix}$,

so verwandelt sich ζ' in $S'(\zeta')$, wo nun S' durch das folgende Schema bestimmt wird: $\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \gamma n & \delta\end{pmatrix}$.

Lassen wir $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ alle möglichen Werthe durchlaufen, so erleidet ζ alle möglichen Ikosaedersubstitutionen und ζ' gewisse jenen in gesetzmässiger Weise zugeordnete simultane Ikosaedersubstitutionen. Dabei genügt es schon, für $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die sämmtlichen modulo 5 genommenen Zahlen zu setzen, die $\alpha\delta - \beta\gamma n = 1$ ergeben, weil 2 nach dem Modul 5 congruente Substitutionen eo ipso die gleichen Werthe von ζ und ζ' ergeben.

Die somit aufgefundene Eigenschaft der Wurzeln unserer Gleichung wollen wir als eine Eigenschaft der Gleichung selbst formuliren. Wir können dann sagen: <u>Unsere Gleichung $f_1(\zeta',\zeta)=0$ bleibt bei gewissen simultanen Ikosaedersubstitutionen der Variabeln ζ',ζ ungeändert.</u> Des Genauern müssen wir 4 Fälle unterscheiden, je nachdem $n \equiv 1, 2, 3, 4 \pmod 5$ ist.

Die Zusammenordnung der simultanen Substitutionen wird besonders einfach im Falle $n \equiv 1 \pmod 5$. Alsdann sind nämlich die auf der vorigen Seite angegebenen Schemata nach dem Modul 5 überhaupt nicht verschieden. Mithin bleibt in diesem Falle die Gleichung $f_1(\zeta',\zeta)=0$ ungeändert, wenn wir ζ und ζ' <u>denselben, übrigens beliebigen Ikosaedersubstitutionen</u> unterwerfen, oder, wie wir sagen können, wenn wir ζ und ζ' <u>cogredient</u> substituiren.

Hinsichtlich der anderen Fälle

le theilen wir Folgendes ohne Beweis mit: man erhält aus der Substitution von ξ' die zugehörige von ξ, wenn man die in jener vorkommende Grösse ε durch ε^n ersetzt. Bei der so hergestellten simultanen Substitution von ξ, ξ' bleibt dann die Gleichung $f_1(\xi, \xi') = 0$ wiederum ungeändert.

Im Folgenden beschränken wir uns der Kürze halber auf den Fall $n \equiv 1 \pmod 5$. Um aus der geschilderten algebraischen Eigenthümlichkeit ein Verfahren zur Herstellung der Gleichung abzuleiten, nehmen wir wieder Bezug auf die Formentheorie. Wir schreiben unsere Gleichung homogen-machend

$$f_1(\xi_1', \xi_2'; \xi_1, \xi_2) = 0$$

und üben auf die Variabeln cogrediente binäre unimodulare Ikosaedersubstitutionen aus. Dann bleibt nicht nur die Gleichung

sondern auch die linke Seite der Gleichung, d. h. die Form $f(\xi_1', \xi_2'; \xi_1, \xi_2)$ ungeändert. Im Uebrigen bemerken wir ohne es hier auszuführen dass f auch bei Vertauschung der ξ und ξ' ungeändert bleiben muss.

Wir suchen nun zunächst die einfachsten Formen dieser Art auf und bilden das vollständige System solcher Formen, aus denen sich alle übrigen Formen rational und ganz darstellen lassen. Wir können sofort vier doppelt-binäre Formen in $\xi_1', \xi_2'; \xi_1, \xi_2$ angeben, welche in diesen beiden Variabelreihen symmetrisch sind, bei Ausübung unserer simultanen Ikosaeder-substitutionen ungeändert bleiben. Es sind dieses:

$$A_1 = \xi_1 \xi_2' - \xi_2 \xi_1'$$

A_6 = 6ten Polare von $f(\xi_1, \xi_2)$,

A_{10} = 10ten " " $H(\xi_1, \xi_2)$,

A_{15} = 15ten " " $T(\xi_1, \xi_2)$.

Dass die Form A, oder vielmehr die geraden Potenzen von A_1 (und andere kommen weiterhin nicht vor) die genannten Eigenschaften besitzen, ist von vornherein klar. Was A_6, A_{10}, A_{15} betrifft, so wird bei der Polarenbildung der Grad von f, H, T in ξ, welcher bez. gleich, 12, 20, 30 ist, auf 6, 10, 15 Einheiten verringert, wofür der Grad in ξ' auf 6, 10, 15 ansteigt. Dass diese Formen bei den simultanen Ikosaedersubstitutionen invariant bleiben, folgt aus der Invarianten-Natur des Polarenprozesses und daraus, dass die Formen f, H, T sich bei Ikosaedersubstitutionen von ξ_1, ξ_2 nicht ändern.

Es zeigt sich nun weiter, dass die angeschriebenen vier Formen das volle Formensystem für die Invarianten der Ikosaedersubstitutionen bilden. Daraufhin können wir unsere gesuchte Form f_1 als ganze Function der A_1, A_6, A_{10},

$\mathfrak{A}_{15}$ mit unbestimmten Coefficienten ansetzen.

Die Möglichkeit dieses Verfahrens ist durchaus an die homogene Formulirung des Problems gebunden. Wegen der allgemeinen Durchführung vgl. die genannte Dissertation von Friedrich oder auch Modulf. II pg. 137-141, wo auch die Fälle $n = 2, 3, 4 \pmod 5$ berücksichtigt sind.

Hier wollen wir uns auf ein Zahlenbeispiel beschränken, indem wir $n = 11$ nehmen. Nach der Rechnung von Friedrich, die sich auf die Reihenentwickelungen von ζ und ζ' stützt, lautet die Transformationsgleichung, welche vom Grade $\psi(n) = 12$ ist, folgendermassen:

$$11 \cdot 17 \cdot \mathfrak{A}_6^2 - 18 \cdot 49\, \mathfrak{A}_1^2 \mathfrak{A}_{10} - 8 \cdot 11 \cdot 835 \cdot \mathfrak{A}_1^6 \mathfrak{A}_6 - 17 \cdot 75841\, \mathfrak{A}_1^{12} = 0.$$

Wir bemerken noch, daſs an die Ausrechnung der entsprechenden Transformationsgleichung für ζ, ζ' gar nicht zu denken ist,

da schon die Transformationsgleichung 3ter Ordnung, wie wir sahen, ausserordentlich complicirt war. Die relativ einfache Gestalt der Transformationsgleichungen für ζ, ζ' liegt in der Einführung der Aggregate A_1, A_6, A_{10}, A_{15} begründet, die allerdings ihrerseits ziemlich complicirte Functionen von ζ, ζ' sind.

Mit der Aufstellung der einen Gleichung $f_1(\zeta', \zeta) = 0$ ist indessen die Theorie der Transformationen 5ter Stufe nicht abgeschlossen. Wir können nämlich statt des willkürlich herausgegriffenen Werthes $\xi(\omega)$ ebenso gut ausgehen von einem der 59 anderen Werthe $\xi\left(\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}\right)$, wo die Zahlen $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ modulo 5 zu unterscheiden sind. Es bedeutet dieses nichts Anderes, als dass wir den Werth von ξ einer der 60 Ikosaedersubstitutionen unterwerfen. Zu jedem dieser Werthe können wir dann die zugehörige Gleichung vom Grade $\psi(n)$ auf-

Zweiter Haupttheil.

Composition zusammengehöriger ganzzahliger Gitter.

4. VI. 96. Wir wenden uns nun zu neuen arithmetischen Entwickelungen betr. ganzzahlige Gitter. Dieselben sollen uns hernach gute Dienste leisten, wenn wir fragen, wie sich die allgemeine Transformationstheorie der elliptischen Functionen im Falle ganzzahliger Gitter modificieren mag. Das Specifische unserer neuen Betrachtungen ist, <u>dass wir immer diejenigen ganzzahligen Formclassen, welche zu derselben Discriminante D gehören, neben einander betrachten.</u> Wir lernten früher (vergl. Teil I pg 169), dass die Zahl dieser Classen eine endliche ist. Unter den Discriminan-

ten überhaupt sind von besonderer Wichtigkeit diejenigen, welche wir pag. 33 Stammdiscriminanten nannten und welche wir mit d bezeichnen wollen. Ihre Wichtigkeit beruht auf dem Satze von pg 33, nach welchem alle Gitter, deren Discriminante keine Stammdiscriminante ist, sondern aus einer solchen durch Multiplication mit n^2 hervorgeht, aus Stammgittern durch Transformation n^{ter} Ordnung gewonnen werden. Die Stammdiscriminanten zerfallen, wie gleichfalls pg. 33 hervorgehoben, in zwei Arten, je nachdem d durch 4 theilbar ist oder nicht.

Ist $d \equiv 0 \pmod 4$, so bezeichnen wir d als Stammdiscriminante erster Art, ist $d \equiv 1 \pmod 4$, so bezeichnen wir d als Stammdiscriminante zweiter Art. Unter den zu gleicher Stammdiscriminante gehörigen Formen giebt es eine ausgezeichnete, welche Hauptform heisst.

Und zwar definiren wir

$x^2 - \frac{d}{4} y^2$ als <u>Hauptform erster Art</u>

$x^2 + xy + \frac{1-d}{4} y^2$ als <u>Hauptform zweiter Art.</u>

Allemal konnten wir eine quadratische Form in zwei Linearfactoren spalten, welche wir als <u>Gitterzahlen</u> oder auch als Minimalcoordinaten bezeichneten. Diese Grössen waren nur bis auf einen willkürlichen Factor bestimmt, den sog. „<u>Azimuthalfactor</u>". Wir setzen bereits fest, daſs bei negativer Discriminante der Azimuthalfactor den absoluten Betrag 1 haben (vergl. Teil I pg 67) und daſs er bei positiver Discriminante reell sein sollte (vergl. Theil I pg 78). Das Product zweier zusammengehöriger Azimuthalfactoren muſste dabei stets gleich 1 sein.

Speciell liegt nun bei den Hauptformen eine bestimmte Art der Spaltung besonders nahe, welche wir

hiermit verabreden wollen. Wir werden eine Hauptform erster Art in die Factoren

$$\xi = x + \frac{\sqrt{d}}{2}y, \quad \eta = x - \frac{\sqrt{d}}{2}y$$

und eine Hauptform zweiter Art in

$$\xi = x + \frac{1+\sqrt{d}}{2}y, \quad \eta = x + \frac{1-\sqrt{d}}{2}y$$

auflösen, wodurch bei den Hauptformen die Azimuthalfactoren festgelegt sind.

Wir wollen ferner für die Hauptformen eine feste Art der geometrischen Darstellung verabreden, indem wir ihnen ein ganz bestimmtes Gitter coordiniren. Aus dem ersten Theile dieser Vorlesung wissen wir, daß wir jeder Form jedes beliebige Gitter zuordnen können, wofern wir nur die Maassbestimmung in der Ebene geeignet definiren. Indessen ist es bequem, bei den folgenden Betrachtungen speciell in folgender Art zu verfahren:

Es handle sich zuerst um

Hauptformen erster Art. Je nachdem d positiv oder negativ ist, haben wir noch zwei verschiedene Fälle von Hauptformen erster Art zu unterscheiden. Wir gehen von einem rechtwinkligen Coordinatensystem u, v aus, wobei jedem Punkt der Ebene in gewöhnlicher Weise zwei Coordinaten u, v entsprechen. Wir setzen dann
bei positivem d

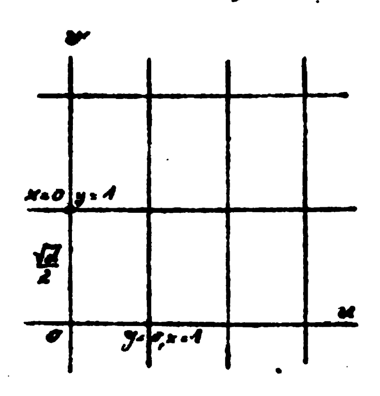
$$x = u \quad , \quad y = \frac{2v}{\sqrt{d}} \ ,$$

bei negativem d

$$x = u \quad , \quad y = \frac{2iv}{\sqrt{d}} \ .$$

Die Gitterecke $x = 1, y = 0$ wird infolgedessen mit dem Punkte $u = 1, v = 0$ der Ebene zusammenfallen. Andrerseits fällt die Gitterecke $x = 0, y = 1$ in den Punkt $u = 0$, $v = \frac{\sqrt{d}}{2}$ bez. (bei negativem d) in den Punkt $u = 0$, $v = \frac{\sqrt{d}}{2i}$. Durch die genannten beiden Eckpunkte und den Anfangspunkt ist ein erstes Parallelogramm unseres Gitter und

weiterhin das ganze Gitter bestimmt. Das Gitter wird, wie man sieht (vergl. die folgende Figur),



ein rechteckiges Gitter. Die zugehörigen Gitterzahlen sind nach pag 97, je nachdem $d > 0$ oder $d < 0$ ist:

$$\xi = u + v, \quad \eta = u - v \qquad \text{bez.} \qquad \xi = u + iv, \quad \eta = u - iv.$$

Wir betrachten zweitens die Hauptformen zweiter Art. Nachdem wir, wie vorher, ein gewöhnliches rechtwinkliges Coordinatensystem u, v definirt haben, setzen wir im

Falle $d > 0$ bez. $d < 0$;

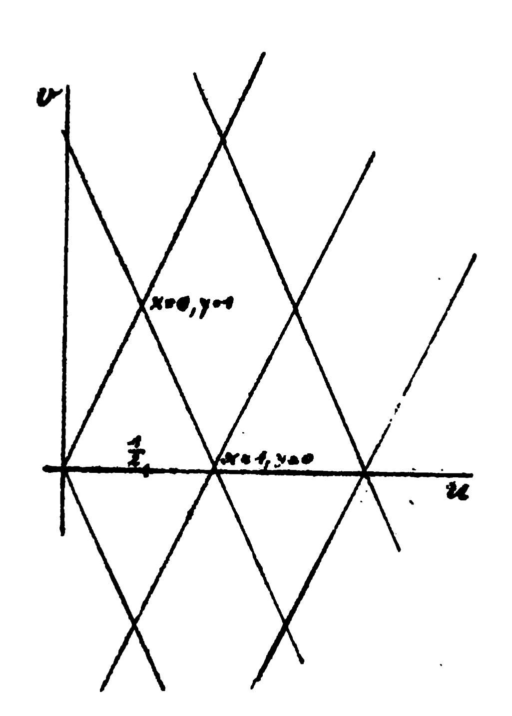
$$u = x + \frac{y}{2} \qquad u = x + \frac{y}{2}$$

bez.

$$v = \frac{\sqrt{d}\cdot y}{2} \qquad v = \frac{\sqrt{d}\cdot y}{2i}$$

Hiernach bestimmen wir die den Ecken des ersten Parallelogramms entsprechenden Punkte der Ebene. Offenbar hat der Punkt $x = 1$, $y = 0$ die Coordinaten $u = 1$, $v = 0$. Dieser Eckpunkt hat also dieselbe Lage, wie vorher, es ist der Einheitspunkt der u Axe.

Ferner haben wir im Punkte $x = 0$, $y = 1$ die Coordinaten $u = \frac{1}{2}$, $v = \frac{\sqrt{d}}{2}$ bez. $v = \frac{\sqrt{d}}{2i}$. Mithin liegt der Eckpunkt $x = 0$, $y = 1$ jetzt nicht wie vorher auf der v-Axe; vielmehr hat er von dieser den Abstand $\frac{1}{2}$. Das aus dem Punkt $x = 0$, $y = 1$ und $x = 1$, $y = 0$ sowie aus dem Anfangspunkte gebildete Dreieck ist ein gleichschenkliches; durch geeignete Verdoppelung desselben (vergl. die Figur auf Seite 101) erhalten wir als erstes Parallelo-



gramm unseres Gitters einen Rhombus. Den Hauptformen zweiter Art entspricht also in Folge unserer Verabredung ein rhombisches Gitter. Die zugehörigen Gitterzahlen drücken sich durch die Coordinaten u und v gerade so aus, wie bei den Hauptformen erster Art; es wird nämlich

$$\xi = u + v \qquad \text{bez.} \qquad \xi = u + iv$$

$$\eta = u - v \qquad\qquad\qquad \eta = u - iv.$$

Wir können, zusammenfassend für beide Formenarten, die geometrische Bedeutung der Gitterzahlen in

der u, v-Ebene dadurch beschreiben, dass wir sagen:

<u>Im Falle eines positiven d sind die Gitterzahlen die mit $\sqrt{2}$ multiplicirten Abstände, welche die Eckpunkte des Gitters von den die Quadranten der u, v-Ebene halbirenden Geraden besitzen.</u> <u>Im Falle eines negativen d aber sind es die gewöhnlichen complexen Zahlen, welche man den Gittereckpunkten in der Gaussischen Ebene beizulegen gewohnt ist.</u>

In der That wird f beziehungsweise gleich $u^2 - v^2$ und $u^2 + v^2$ sein.

Wir werden nun zeigen, dass die hiermit durchgeführte Construction der Hauptgitter in dem allerengsten Zusammenhange mit der <u>Theorie der quadratischen Körper</u> steht, welche sonst in abstracter Weise entwickelt wird und die hier in ihren Grundlagen als bekannt vorausgesetzt werden

soll (vergl. etwa die Darstellung in Dedekind's Zahlentheorie oder auch die Protocolle des Wintersemi-nars).

Ein quadratischer Körper wird definirt durch die Irrationalität $\sqrt[2]{m}$, wo m als quadratfreie Zahl vorausgesetzt wird, indem nämlich ein etwaiger quadratischer Theiler von m für den Körper irrelevant wäre. Bestimmt man nun die ganzen algebraischen Zahlen des Körpers $k(\sqrt{m})$, so wird eine Fallunterscheidung nöthig, je nachdem

$$m \equiv 2 \quad \text{bez.} \equiv 3 \pmod 4$$

oder

$$m \equiv 1 \pmod 4$$

ist. Im ersten Falle haben die ganzen Zahlen des Körpers die Gestalt:

$$x + y\sqrt{m};$$

im zweiten Falle sind sie dargestellt durch

$$x + y\,\frac{1+\sqrt{m}}{2},$$

wo beidemal unter x und y ganze rationale Zahlen verstanden werden. Als Basis des Körpers haben wir hiernach zu bezeichnen:

im ersten Falle die beiden Grössen

$$1, \sqrt{m},$$

im zweiten Falle die beiden folgenden Zahlen

$$1, \frac{1+\sqrt{m}}{2}$$

Als Discriminante dieses Körpers definirt man bekanntlich das Quadrat der aus der Basis und ihren conjugirten Werthen gebildeten Determinante. Hiernach wird im ersten Falle:

$$d = \begin{vmatrix} 1, & \sqrt{m} \\ 1, & -\sqrt{m} \end{vmatrix}^2 = 4m$$

im zweiten Falle dagegen:

$$d = \begin{vmatrix} 1, & \frac{1+\sqrt{m}}{2} \\ 1, & \frac{1-\sqrt{m}}{2} \end{vmatrix}^2 = m.$$

Den ganzen algebraischen Zahlen des Körpers können wir hiernach im einen oder anderen Falle bez.

die Form geben:

$$x + y\frac{\sqrt{d}}{2} \quad \text{bez.} \quad x + y\,\frac{1+\sqrt{d}}{2}.$$

Das sind aber, wie wir sehen, genau dieselben Verbindungen, welche wir oben (pag 96) als Gitterzahlen ξ bezeichneten und aus den zur Discriminante d gehörigen Hauptformen 1ter und 2ter Art ableiteten. Das heisst also: <u>die zu der Hauptform einer Stammdiscriminante d vermöge unserer Verabredungen gehörigen Gitterzahlen ξ sind mit den ganzen algebraischen Zahlen des Körpers $K(d)$ genau identisch.</u>

Unsere Gitterbetrachtung weisst uns aber darauf hin, <u>neben den Gitterzahlen ξ gleichzeitig die Gitterzahlen η im Auge zu haben.</u> Für die Körpertheorie ergiebt sich daraus, dass wir <u>neben dem Körper</u> <u>$\sqrt{d}$</u> (welcher von dem Körper $\sqrt{m}$ ersichtlich nicht verschieden ist) <u>gleichzeitig den conjugirten Kör-</u>

per $-\sqrt{d}$ stellen sollen.

Diese Modification der Betrachtung ist allerdings im Falle des quadratischen Körpers keine eigentliche Erweiterung; da nämlich $-\sqrt{d}$ ersichtlich rational durch $+\sqrt{d}$ ausgedrückt werden kann, so ist $R(-\sqrt{d})$ mit $R(+\sqrt{d})$ identisch. Dieselbe sehr selbstverständliche Thatsache meint man, wenn man sagt: Der quadratische Körper ist ein Galois'scher Körper: oder: die quadratische Gleichung ist eine Galois'sche Gleichung. Trotzdem ist die durch unser Gitter indicirte consequente Nebeneinanderstellung der Zahlen $x+y\frac{\sqrt{d}}{2}$ und $x-y\frac{\sqrt{d}}{2}$ etc. sehr nützlich. Es gilt das in verstärktem Maasse, wenn wir zu höheren Körpern schreiten.

Wie sich unser geometrisches Bild auf diese höheren Fälle erweitert, ist unmittelbar verständlich. Wir haben dann nicht ein von Geraden gebildetes Gitter in der Ebene,

sondern ein Gitter im R_n zu betrachten, welches von einem Systeme paralleler aequidistanter R_{n-1} gebildet wird. Die discontinuirliche Anordnung der Gitter-Eckpunkte im R_n ist etwas durchaus übersichtliches. Dementsprechend wird sich bei gleichzeitiger Betrachtung der zu jedem Gitterpunkte gehörigen n Coordinaten (Gitterzahlen) eine übersichtliche Theorie der Gitterzahlen ergeben. Beschränken wir uns aber nur auf einen der n conjugirten Körper, d.h. auf nur eine der n Coordinaten der Gitterpunkte, so bedeutet dieses geometrisch, dass wir das n-dimensionale Gitter auf eine Mannigfaltigkeit von nur einer Dimension projiciren. Hierbei entsteht natürlich ein verworrenes Bild der räumlichen Anordnung, dessen Punkte auf der gewählten Coordinatenaxe im Allgemeinen überall dicht liegen werden.

Dementsprechend wird die Theorie der Gitterzahlen von diesem beschränkteren Standpunkte aus unübersichtlich werden. Übrigens kommt ja ganz dieselbe Bemerkung in der Theorie der Abel'schen Functionen zur Geltung, welche gerade durch den von Jacobi vollzogenen Übergang zu höheren Dimensionen ihre heutige einfache Gestalt gewonnen hat.

11. VI. 96. Nachdem wir im Vorhergehenden für die <u>Hauptformen</u> eine bestimmte Zerlegung in Factoren und daran anschliessend eine bestimmte geometrische Interpretation verabredet haben, werden wir jetzt das Entsprechende für die <u>Nebenformen</u> (Nebenklassen) durchführen. Ebenso, wie die Theorie der Hauptgitterzahlen übereinstimmt mit der Theorie der gewöhnlichen ganzen algebraischen Zahlen des Körpers $\sqrt{d}$, so war-

den wir erkennen, dass die Gitterzahlen der Nebenklassen auf die Idealtheorie des genannten quadratischen Körpers führen.

Es handelt sich um eine beliebige quadratische Form

$$f = ax^2 + bxy + cy^2$$

der Stammdiscriminante $d = b^2 - 4ac$.

Wir zerlegen dieselbe nach dem mehrfach genannten Schema

$$f = \xi\eta,$$

$$\xi = \varrho\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2}\,y\right),$$

$$\eta = \frac{1}{\varrho}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b-\sqrt{d}}{2}\,y\right),$$

in Linearfactoren. Die geometrische Interpretation der „Gitterzahlen" ξ und η geschieht in derselben Weise, wie pag. 99 bis 101 im Falle der Hauptformen. Wir setzen nämlich

$$\xi = u + (i)\,v,$$

$$\eta = u - (i)\cdot v,$$

welche abkürzende Schreibweise uns im Falle eines positiven oder

negativen d bez. die beiden Gleichungen $\quad = u+v$ oder $\quad = u+iv$ etc. vertreten soll, und deuten u und v als rechtwinklige Coordinaten in der Ebene. Die Gitterzahlen bedeuten dann, wie früher, im Falle eines positiven d die mit $\sqrt{2}$ multiplicirten Abstände der Gitterpunkte von den die Quadranten der u,v-Ebene halbirenden Geraden; im Falle eines negativen d dagegen bedeuten sie einfach die den Gitterpunkten in der Gaußischen Ebene zugeordneten complexen Zahlen.

In unserer Zerlegung sind die „Azimuthalfactoren" ρ und $\frac{1}{\rho}$ vorläufig noch unbestimmt. Ein erster Schritt zu ihrer Festlegung soll der folgende sein:

Wir betrachten neben der Formenclasse, welche die Form (a, b, c) enthält, diejenige, in welcher die Form $(a, -b, c)$ vorkommt. Zwei solche Classen nennen wir <u>conjugirte Klassen</u>. Eine Klasse, wel-

che mit ihrer conjugirten identisch ist, bezeichnen wir, wie schon Theil I pag. 162 hervorgehoben, als *Anceps-classe*.

Wir treffen nun die Verabredung, dass conjugirte Gitter mit conjugirten Factoren ϱ ausgestattet werden sollen, wobei wir zwei Factoren ϱ und ϱ' conjugirt nennen, wenn $\varrho\varrho' = 1$ ist. Hiernach lauten die zu zwei conjugirten Gittern gehörigen Gitterzahlen:

$$\xi = \varrho\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right), \quad \eta = \frac{1}{\varrho}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b-\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right)$$

$$\xi' = \frac{1}{\varrho}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{-b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y'\right), \quad \eta' = \varrho\left(\sqrt{a}\,x' + \frac{-b-\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y'\right).$$

Lassen wir hierin x und y alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen, so erhalten wir die Minimalcoordinaten der Eckpunkte desjenigen Punktgitters, welchem die Form (a, b, c) angehört; lassen wir ebenso

x' und y' alle positiven und negativen ganzen Zahlen durchlaufen, so erhalten wir die Minimalcoordinaten der Eckpunkte des conjugirten Gitters, dem die Form $(a, -b, c)$ angehört. Unter den beiden unendlichen Serien von Punkten x, y und x', y' wollen wir je zwei solche Punkte mit einander vergleichen, für welche $x' = x$, $y' = -y$ ist. Ein Blick auf die vorstehenden Formeln zeigt dann, dass für solche Punkte

$$\xi' = \eta \quad \text{und} \quad \eta' = \xi$$

wird. Unsere Verabredung über die Azimuthalfactoren conjugirter Formen bringt es also mit sich, dass, wenn die Form f die Zerlegung

$$f = \xi \cdot \eta$$

liefert, die conjugirte Form f' die Zerlegung

$$f' = \eta \xi$$

giebt. Diese Thatsache hat eine einfache geometrische Bedeutung. Berücksichtigen wir nämlich den Zusammenhang zwischen den Coordinaten ξ, η und u, v, so ergeben sich aus den Gleichungen $\xi' = \eta, \eta' = \xi$ die beiden folgenden Gleichungen:

$$u' \pm (i) v' = u \mp (i) v$$

d. h.

$$u' = u \quad , \quad v' = -v.$$

Der Punkt u', v' geht also aus dem Punkte u, v durch Spiegelung an der u-Axe hervor. Überhaupt können wir sagen:

<u>In Folge unserer obigen Verabredung liegen zwei conjugirte Gitter in Bezug auf die u-Axe spiegelbildlich zu einander.</u>

Wir mögen noch hinzufügen, daß sie auch <u>spiegelbildlich in Bezug auf die v-Axe</u> liegen. Der Grund hiervon ist der, daß jedes Gitter bei einer Drehung von $180°$ um 0 mit sich zur Deckung kommt. In Folge dessen giebt

es in unserem ersten Gitter ausser dem Punkte u, v auch stets einen Punkt – u, – v. In diesen wird aber der Punkt u, – v des zweiten Gitters durch eine Spiegelung an der v-Axe übergeführt.

Die Bestimmung der Azimuthalfactoren ist damit natürlich noch nicht abgeschlossen. Mit unseren bisherigen Verabredungen ist es verträglich, dass wir von zwei conjugirten Gittern das eine noch ganz willkürlich orientiren. Erst nachdem dieses geschehen, ist die Lage des zweiten Gitters festgelegt.

Nur in dem besonderen Falle der Ancepsgitter ist durch das Vorstehende die Orientirung bereits genauer fixirt, da sie die besondere Eigenschaft haben, mit ihren conjugirten Gittern identisch zu sein. (Theil I pg 163). Nach dem eben Auseinandergesetzten erhält man das richtig orientirte conjugirte Gitter, wenn man das orientirte

ursprüngliche Gitter an der u-Achse (oder v-Achse) spiegelt; ein richtig orientirtes Ancepsgitter muss daher so liegen, dass es durch Spiegelung an der u- (und v-) Achse in sich übergeht.

Wie wir nun früher gesehen haben (vergl. Theil I pg 232 ff) lässt sich das Fundamentalparallelogramm eines Ancepsgitters immer als Rechteck oder Rhombus wählen. Die Orientirung des Ancepsgitter ist deshalb so auszuführen, dass eine Seite des Rechtecks oder eine Diagonale des Rhombus in die Richtung der u- (oder v-) Achse fällt. Dies kann offenbar jedesmal nur auf höchstens 2 Weisen geschehen, da die Seiten des Rechtecks und die Diagonalen des Rhombus rechtwinklig auf einander stehen. Ein Ancepsgitter lässt deshalb nach den vorstehenden Festsetzungen nur noch eine 2-fache Möglichkeit der

Orientirung zu. Wir sprechen dies in folgendem Satze aus:

Unsere Verabredung über die conjugirten Gitter bedeutet für die Ancepsgitter speciell eine noch auf 2 Weisen herzustellende Orientirung derselben.

Wir werfen noch einen Blick auf die Gesammtfigur, soweit sie sich aus unseren bisherigen Betrachtungen ergeben hat. Sie besteht aus einem System von h Gittern, einem Hauptgitter und $h-1$ Nebengittern. Das Hauptgitter haben wir bereits in eindeutiger Weise festgelegt, die Ancepsgitter in zweideutiger Weise. Die übrigen Gitter sind einander paarweise zugeordnet und liegen spiegelbildlich in Bezug auf die Coordinatenaxen.

Jedes dieser Gitter liefert uns ein System von Gitterzahlen ξ, η. Die arithmetische Natur der Hauptgitterzahlen haben wir bereits oben besprochen:

es sind die ganzen Zahlen des Körpers Vd. Die arithmetische Natur der Nebengitterzahlen hängt offenbar von der Wahl des Factors ϱ ab. Wir wollen hierüber vorläufig nur soviel sagen, daß wir dieselben als Irrationalitäten fixiren werden, welche zu dem Körper Vd in einer einfachen Beziehung stehen.

Wir haben schon gelegentlich als Zielpunkt unserer Entwickelungen hingestellt, daß unsere h Gitter einen Organismus bilden und daß sie durch innere Beziehungen verbunden sind. Dies wird deutlich werden, wenn wir im Folgenden dazu übergehen, Rechnungsregeln festzusetzen, nach denen wir mit den Gitterzahlen ξ, η unserer h Gitter operiren wollen. Wir kommen hierdurch zu neuen fruchtbaren Fragestellungen und vertiefen unsere Auffassung der Gittertheorie.

Von der Composition der Gitter

Es handelt sich zunächst darum fest-zusetzen, was wir unter der Operation der Addition und Multiplication verstehen wollen. Wir sagen:

Man addirt Gitterpunkte, indem man ihre Minimalcoordinaten addirt.

Man multiplicirt Gitterpunkte, indem man ihre Minimalcoordinaten multiplicirt.

In Zeichen drücken wir dieses folgendermaassen aus. Gegeben seien zwei Gitterpunkte (ξ, η) und (ξ', η'). Nach den vorstehenden Regeln haben wir:

$$(\xi, \eta) + (\xi', \eta') = (\xi + \xi', \eta + \eta')$$
$$(\xi, \eta) \cdot (\xi', \eta') = (\xi\xi', \eta\eta').$$

Im Uebrigen setzen wir fest, dass wir nur solche Operationen vornehmen wollen, durch welche wir wieder auf Punkte unserer ursprünglichen

Figur geführt werden. Wir wollen also durch die vorzunehmenden Operationen keine neuen geometrischen Elemente bez. keine neuen Irrationalitäten einführen.

Was nun die Addition anbetrifft, so ergiebt sich: Sind zwei Punkte $(\xi;\eta)$ u. $(\xi';\eta')$ zu addiren, die demselben unserer h Gitter angehören, so liegt offenbar auch der Punkt $(\xi+\xi', \eta+\eta')$ in demselben Gitter, denn er wird durch geometrische Addition der Strecken von O nach (ξ,η) bez. nach (ξ',η') erhalten. Liegen dagegen die Punkte (ξ,η) u. (ξ',η') in verschiedenen Gittern, so wird ihre Summe im allgemeinen nicht in unserer Figur vorkommen (vorausgesetzt natürlich, daſs die Azimuthalfactoren irgendwie fixirt sind) Wir werden daher im Folgenden die Addition auch nur auf Punkte desselben Gitters anwenden.

Ebenso wie von der Addition der Gitterpunkte, werden wir auch von der Addition ganzer Gitter reden,

indem wir festsetzen:

Man addirt zwei Gitter, indem man zu jedem Punkte des einen Gitters jeden des anderen addirt.

Auch die Addition der Gitter wird im allgemeinen nicht statthaft sein, wenn wir an unserer Beschränkung festhalten und überdies als Resultat der Addition wieder eine discrete Punktmenge erhalten wollen. Doch kann man z. B. zwei dem Hauptgitter eingelagerte Gitter addiren, was wir in unseren späteren Entwickelungen auch ausführen werden. Wir verweilen deshalb noch einen Augenblick dabei, um zu untersuchen, was über die Discriminante des durch Addition zweier Gitter G_1 und G_2, (die wir etwa dem Hauptgitter eingelagert denken) resultirenden Gitters G_3 auszusagen ist. Sind die Inhalte der Fundamentalparallelogramme von G_1 und G_2 resp. $m\sqrt{d}$ und $n\sqrt{d}$, so können wir den Inhalt des Fundamentalparallelogramms

von G_3 mit $r\sqrt{d}$ bezeichnen, unter m, n, r ganze rationale Zahlen verstanden. Es muß dann, wie wir behaupten r ein Theiler von m und n sein, weil die Gitter G_1 und G_2 in G_3 enthalten sein müssen. Ist nämlich ein Gitter I in einem Gitter II enthalten und haben die Fundamentalpunkte des ersteren in dem letzteren die Coordinaten $x_0\, y_0,\ x_1\, y_1$, so ist bekanntlich der Inhalt des Fundamentalparallelogramms von I $|x_0 y_1 - y_0 x_1|$ mal so gross als der von II, also ein ganzzahliges Multiplum desselben; Damit ist aber unsere Behauptung gerechtfertigt.

Ergiebiger ist für unsere Zwecke die Operation des Multiplicirens. *Man darf, wie sich im Folgenden zeigen wird, zwei beliebige Gitterpunkte mit einander multipliciren*; die Multiplication führt stets auf Gitterpunkte unserer Figur, vorausgesetzt, daß man die Azimuthalfactoren passend wählt.

Wir haben bereits festgesetzt, was wir unter der Multiplication zweier Gitterpunkte verstehen; wir wollen aber auch hier, ebenso wie bei der Addition, gleich die ganzen Gitter in Betracht ziehen und erklären, was man unter der Multiplication, oder besser gesagt, Composition zweier Gitter versteht.

Zwei Gitter G und G' componiren heisst: alle Punkte von G mit allen Punkten von G' multipliciren und die so entstehenden Punkte auf alle möglichen Weisen addiren.

Die Operation des Componirens ist also nur theilweise eine Multiplication, theilweise dagegen eine Addition, die neue Bezeichnung ist deshalb durchaus gerechtfertigt.

Ebenso wie man nicht zwei beliebige Gitter addiren kann, ist es auch nicht möglich, sie zu componiren, schon aus dem Grunde, weil die Operation des Componirens das Addiren von Gitterzahlen in sich schliesst. Wir wollen deshalb in

Folgendem nur von der Composition unserer h Stammgitter reden, die stets ausführbar ist.

Wir führen zunächst den Nachweis, <u>dass sich durch Composition zweier Stammgitter wieder ein Stammgitter derselben Discriminante ergiebt.</u>

Seien die zu componirenden Gitter:

$$G = \sqrt{a}\cdot x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}} \text{ und } G' = \sqrt{a'}\cdot x' + \frac{b'+\sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\,y'$$

und die entsprechenden Formen

$$f = ax^2 + bxy + cy^2 \text{ und } f' = a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2.$$

Um unsere Behauptung zu rechtfertigen, präpariren wir uns die Gitter resp. Formen erst in geeigneter Weise, indem wir ihnen im Anschluss an Dirichlet <u>einige Lage</u> geben. Wir nennen nämlich zwei Formen einig, <u>wenn die Coefficienten a und a' theilerfremd sind und die mittleren Coefficienten gleich.</u>

Die letztere Bedingung hat eine einfache geometrische Bedeutung. Ist nämlich $b = b'$, so muss auch

infolge der Gleichheit der Discriminanten $ac = a'c'$ sein. Bezeichnen wir nun die Parallelogrammwinkel, die zu unsern Formen gehören, mit ψ und ψ', so ist

$$\cos\psi + i\sin\psi = \frac{b+\sqrt{D}}{2\sqrt{ac}},$$

$$\cos\psi' + i\sin\psi' = \frac{b'+\sqrt{D}}{2\sqrt{a'c'}} \text{ also}$$

da $\frac{b+\sqrt{D}}{2\sqrt{ac}} = \frac{b'+\sqrt{D}}{2\sqrt{a'c'}}$, auch $\cos\psi + i\sin\psi = \cos\psi' + i\sin\psi'$ oder $\psi = \psi'$. Bei einiger Lage zweier Formen besitzen also die Fundamentalparallelogramme dieselben Winkel.

Wir zeigen jetzt: wenn zwei Stammformen vorliegen, so können wir sie stets durch zwei aequivalente einige Formen ersetzen.

ψ

1. Wir können bewirken, dass a und a' relativ prim werden. (Vergl. Dir-Ded. pg 234, 4te Auflage)

2. Wir führen an f bez. f' die Transformation erster Ordnung aus

$$x = X + \lambda Y \qquad x' = X' + \mu Y'$$
$$y = \qquad Y \qquad y' = \qquad Y',$$

wodurch sich ergiebt:

$$f = aX^2 + (2a\lambda + b)XY + (a\lambda^2 + b\lambda + c)Y^2,$$
$$f' = a'X'^2 + (2a'\mu + b')X'Y' + (a'\mu^2 + b'\mu + c')Y'^2.$$

Hier können wir λ und μ so bestimmen, dass

$$2a\lambda + b = 2a'\mu + b' \text{ wird.}$$

Denn die Congruenz

$$2a\lambda \equiv b' - b \pmod{2a'}$$

ist immer lösbar, da a und a' relativ prim sind und $b' - b \equiv 0 \pmod 2$ bei gleichem d.

Nennen wir nun den gemeinsamen Werth der mittleren Coefficienten der beiden Formen B

$$b = b' = B,$$

so folgt aus der Gleichheit der Dis-

criminanten $ac = a'c'$. Da nun a und a' als theilerfremd angenommen werden, so muss c durch a' und c' durch a theilbar sein. Wir setzen:

$$c = a'\,\mathfrak{C} \qquad c' = a\,\mathfrak{C}$$

Die beiden Formen sind dann

$$(a, \mathfrak{B}, a'\,\mathfrak{C}) \text{ und } (a', \mathfrak{B}, a\,\mathfrak{C})$$

und die entsprechenden Gitter:

$$\mathfrak{G} = \sqrt{a}\,x + \frac{\mathfrak{B} + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y \text{ und } \mathfrak{G}' = \sqrt{a'}\,x' + \frac{\mathfrak{B} + \sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\,y'.$$

Nunmehr können wir folgende Identität aufschreiben:

$$(1) \quad \left(\sqrt{a}\,x + \frac{\mathfrak{B} + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right)\left(\sqrt{a'}\,x' + \frac{\mathfrak{B} + \sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\,y'\right) = \sqrt{aa'}\,(xx' - \mathfrak{C}yy') + \frac{\mathfrak{B} + \sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}\,(axy' + a'x'y + \mathfrak{B}yy')$$

$$= \sqrt{aa'}\,X + \frac{\mathfrak{B} + \sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}\,Y.$$

Aus dieser folgt: Wenn wir zwei Gitterzahlen aus den Gittern $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}'$ multipliciren, so erhalten wir eine Gitterzahl, die zu dem Stammgitter $(aa', \mathfrak{B}, \mathfrak{C})$ gehört.

Wir haben damit einen Theil unserer Behauptung bereits bewiesen, aber auch nur erst einen Theil. Wir haben nämlich gezeigt, dass durch Composition von G und G' Zahlen eines Stammgitters

$$G'' = \sqrt{aa'}\,X + \frac{B'+\sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}\,Y$$

erhalten werden, aber noch nicht bewiesen, dass auch *alle Zahlen dieses Stammgitters* sich durch die Composition ergeben. Um dies noch zu zeigen, brauchen wir offenbar nur zu beweisen, dass die Basiszahlen von G''

$$\sqrt{aa'} \text{ und } \frac{B'+\sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}$$

bei der Composition resultiren. Von der ersten ist dies sofort evident; die zweite ergiebt sich auf folgende Weise. Bei der Composition erhalten wir offenbar die Gitterzahlen:

$$\frac{B'+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\sqrt{a'} \text{ und } \frac{B'+\sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\sqrt{a},$$

also auch alle Zahlen, die in der Formel enthalten sind:

$$\frac{\mathfrak{B}'+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\sqrt{a'}\,z_1+\frac{\mathfrak{B}'+\sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\sqrt{a}\,z_2 \text{ oder}$$

$$\frac{\mathfrak{B}'+\sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}\,(a'z_1+a\,z_2),$$

unter z_1 und z_2 ganze rationale Zahlen verstanden. Da nun a' und a theilerfremd sind, ist z_1 und z_2 stets so zu bestimmen, daß $a'z_1+a\,z_2=1$ wird, d. h.

$$\frac{\mathfrak{B}'+\sqrt{d}}{2\sqrt{aa'}}$$

wird bei der Composition ebenfalls erhalten.

Nimmt man noch hinzu, was selbstverständlich ist, daß durch die Orientirung von G und G' auch die von G'' bestimmt ist, so können wir jetzt den Satz aussprechen:

<u>Zwei irgendwie orientirte Stammgitter ergeben componirt wieder ein ganz bestimmt orientirtes Stammgitter.</u>

Der vorstehende Satz ist der Fundamentalsatz der ganzen Theorie, auf dem, im Grunde genommen, alles folgende ruht. Bei seinem Beweise sind wir erst auf Umwegen zu der durch Composition resultirenden Form gelangt; es giebt aber auch eine Regel, wie man direct diese Form finden kann. Wir führen dieselbe hier ohne Beweis an, indem wir auf eine Abhandlung von Arndt, Crelle's Journal Bd. 56, 1857 verweisen. Es mögen die früheren Bezeichnungen beibehalten werden, es seien also die zu componirenden Gitter:

$$\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y \text{ u. } \sqrt{a'}\,x' + \frac{b'+\sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\,y'$$

Die für das componirte Gitter charakteristischen Zahlen a'' und b'' werden dann auf folgende Weise bestimmt: Es wird

$$a'' = \frac{aa'}{\mu^2},$$

wo μ der grösste gemeinsame

Theiler von

a, a' und $\frac{b+b'}{2}$ ist. Weiter muss b'' den 3 Congruenzen genügen

$$b'' \equiv b \pmod{\frac{2a}{\mu}} \qquad\qquad b''\frac{a'}{\mu} \equiv b\frac{a'}{\mu} \pmod{\frac{2aa'}{\mu^2}}$$

$$b'' \equiv b' \pmod{\frac{2a'}{\mu}} \quad \text{oder} \quad b''\frac{a}{\mu} \equiv b'\frac{a}{\mu} \pmod{\frac{2aa'}{\mu^2}}$$

$$\left(\frac{b+b'}{2\mu}\right)b'' \equiv \frac{bb'+d}{2\mu} \pmod{\frac{2aa'}{\mu^2}} \qquad b''\frac{b+b'}{2\mu} \equiv \frac{bb'+d}{2\mu} \pmod{\frac{2aa'}{\mu^2}}$$

Bezeichnet man nun mit r, s, t drei ganze rationale Zahlen, die der Bedingung genügen

$\frac{a'}{\mu}r + \frac{a}{\mu}s + \frac{b+b'}{2\mu}t = 1$ (solche giebt es stets, da $\frac{a}{\mu}$, $\frac{a'}{\mu}$ und $\frac{b+b'}{2\mu}$ theilerfremd sind), so erhält man, wenn man die 3 Congruenzen resp. mit r, s, t multiplicirt und addirt:

$$b'' \equiv b\frac{a'}{\mu}r + b'\frac{a}{\mu}s + \frac{bb'+d}{\mu}\cdot\frac{b+b'}{2\mu}t$$
$$\left(\text{mod.}\ \frac{2aa'}{\mu^2} = 2a''\right)$$

Damit ist aber b'' völlig festgelegt,

denn dasselbe ist offenbar nur mod $2a''$ bestimmt.

Die Compositionstheorie ist von *Gauss* in den Disquisitiones arithmeticae begründet worden. Gauss spricht natürlich nicht von den Gitterzahlen, sondern von den zugehörigen Formen. Zu der Composition der Formen kommen wir unmittelbar, indem wir in der Gleichung:

$$\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right)\left(\sqrt{a'}\,x' + \frac{b'+\sqrt{d}}{2\sqrt{a'}}\,y'\right) = \sqrt{a''}\,x'' + \frac{b''+\sqrt{d}}{2\sqrt{a''}}\,y''$$

rechts und links die Norm bilden. Die so entstehende Gleichung:

$$(ax^2+bxy+cy^2)(a'x'^2+b'x'y'+c'y'^2) = a''x''^2+b''x''y''+c''y''^2$$

können wir folgendermassen in Worte fassen:

Die rechts stehende Form zerfällt in das Product der beiden links stehenden, wenn wir für x'', y'' gewisse bilineare ganzzahlige Verbindungen

der x y und x' y' einsetzen (wie sie aus den Formeln (1) pg. 126 hervorgehen)

Wir können aber diese Darstellung der Theorie unmöglich für zweckmäßig halten. Offenbar dringen wir tiefer in den wahren Sachverhalt ein, wenn wir von den complexen Factoren als wenn wir von ihrem Product, den Formen, sprechen. Denn der einzelne complexe Factor enthält absoluten Betrag + Azimuth, während in dem correspondirenden Werthe der Form nur der absolute Betrag hervortritt.

Die Composition der Formen ist nur ein Corollar, nicht ein Aequivalent für die Composition der Gitterzahlen.

Man wird dies umsomehr zugeben, wenn man bedenkt, daß der Rückschluß von den Formen zu den Gittern nicht ohne weiteres möglich ist. Es kann sehr wohl sein, daß eine Stammform F', wenn man für ihre Variabeln ganzzahlige

bilineare Verbindungen zweier andern Variabelnpaare setzt, in das Product zweier Stammformen F und F' zerfällt, ohne dass darum ein zu F" gehöriges Gitter sich aus 2 passend orientirten zu F und F' gehörigen 2 Gittern componiren liesse.

Man kann die Frage aufwerfen, warum Gauss dennoch diese Form der Darstellung gewählt hat. Wir können natürlich darüber nichts Bestimmtes aussagen. Immerhin hat, wenn man die späteren Ausführungen von Gauss über die Gittervorstellung im Falle negativer Discriminanten (vergl. seine Anzeige des Buches von Seeber, ges. Werke Bd II) und seine Publicationsweise berücksichtigt, die Auffassung manches für sich, dass Gauss selbst im Besitz der Gitterzahlen sein mochte, daß er aber aus persönlichen Gründen die Composition der Gitterzahlen hinter der Composition der

quadratischen Formen und also die Zerlegung der gewöhnlichen Zahlen in complexe Factoren hinter der Darstellung dieser Zahlen durch die entsprechenden Formen verborgen hat. Übrigens geht die Idee, zerlegbare Formen (insbes. die binären quadratischen Formen) zu componiren, auf Lagrange zurück.

Ehe wir weiter in der Theorie fortschreiten, wird es zweckmässig sein, noch einige specielle Fälle unseres Fundamentalsatzes zu betrachten.

1. Sind die beiden zu componirenden Gitter mit dem Hauptgitter identisch, so muss das resultirende Gitter wieder das Hauptgitter sein; denn nach unserem Satze muss das Resultat der Composition wieder ein Stammgitter sein und überdies muss es das Product 1.1 enthalten, da 1 in den beiden zu componirenden Gittern vorkommt. Es muss infolgedessen mit dem Hauptgitter identisch sein. Wir

können also den Satz aussprechen:

Componirt man das Hauptgitter mit sich, so resultirt wieder das Hauptgitter.

Dieser Satz lautet in Bezug auf die Gitterzahlen:

Zwei Hauptzahlen mit einander multiplicirt geben wieder eine Hauptzahl.

Es lässt sich in dieser Fassung auch leicht rein rechnerisch nachweisen. Wir betrachten zunächst den Fall $d \equiv 0 \pmod{4}$. Die beiden Hauptzahlen seien:

$$\xi = x + \frac{y\sqrt{d}}{2}, \quad \eta = x - \frac{y\sqrt{d}}{2},$$

$$\xi' = x' + \frac{y'\sqrt{d}}{2}, \quad \eta' = x' - \frac{y'\sqrt{d}}{2}.$$

Dann wird

$$\xi\xi' = \left(x + y\frac{\sqrt{d}}{2}\right)\left(x' + y'\frac{\sqrt{d}}{2}\right) = \left(xx' + \frac{yy'd}{4}\right) + (xy' + yx')$$

$$= x'' + y''\frac{\sqrt{d}}{2}$$

$$\eta\eta' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$= x'' - y''\frac{\sqrt{d}}{2}.$$

d. h. das Product ist wieder eine Hauptgitterzahl, da x'', y'' für alle ganzzahligen Werte von x, x', y, y' gemäss der Voraussetzung $d \equiv 0 \pmod{4}$ ebenfalls ganze Zahlen sind.

Ähnlich im Falle $d \equiv 1 \pmod{4}$. Sind die zu multiplicirenden Gitterzahlen:

$$\xi = x + y\,\frac{1+\sqrt{d}}{2}\,,\quad \eta = x + y\,\frac{1-\sqrt{d}}{2}\,,$$

$$\xi' = x' + y'\,\frac{1+\sqrt{d}}{2}\,,\quad \eta' = x' + y'\,\frac{1-\sqrt{d}}{2}\,,$$

so ergiebt sich durch Multiplication

$$\begin{aligned}\xi\xi' &= \left(x + y\,\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right)\left(x' + y'\,\frac{1+\sqrt{d}}{2}\right) = \\ &= \left[xx' + yy' \cdot \frac{d-1}{4}\right] + (xy' + x'y + yy') \cdot \frac{1+\sqrt{d}}{2} \\ &= x'' + y''\,\frac{1+\sqrt{d}}{2}\,,\end{aligned}$$

womit unsere Behauptung auch in diesem Falle gerechtfertigt ist.

Wir bemerken noch, daß unsere Behauptung vom Standpunkte der Körpertheorie ganz selbstverständlich ist. Wir haben nämlich nur gezeigt, daß das Product zweier ganzer Zah-

len des Körpers Vd wieder eine ganze Zahl desselben Körpers ist.

2. Ist von den beiden zu componirenden Gittern das eine das Hauptgitter H, das andere ein Nebengitter G, in beliebiger Orientirung, so ergiebt sich durch Composition bei der wieder das Nebengitter G in derselben Orientirung. Denn das resultirende Gitter muss offenbar, da das Hauptgitter die 1 enthält, das Gitter G enthalten und infolgedessen mit ihm identisch sein, da beide dieselbe Discriminante haben.

Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

Componirt man ein beliebiges Nebengitter mit dem Hauptgitter, so resultirt dasselbe Nebengitter, u. zw. gleichviel, wie wir uns den Azimuthalfactor ϱ bestimmt denken.

Für die Gitterpunkte lautet der entsprechende Satz:

Multiplicirt man einen Punkt

eines Nebengitters mit einem Punkte des Hauptgitters, so erhält man einen Punkt desselben Nebengitters.

Um die Richtigkeit dieses Satzes rechnerisch nachzuweisen, betrachten wir zunächst wieder den Fall $d \equiv 0 \pmod{4}$. Wir haben dann:

$$\xi = x + y\frac{\sqrt{d}}{2}, \quad \eta = x - y\frac{\sqrt{d}}{2}$$

$$\xi' = \varrho\left(\sqrt{a}\,x' + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y'\right), \quad \eta' = \frac{1}{\varrho}\left(\sqrt{a}\,x' + \frac{b-\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y'\right).$$

Das Product $\xi\xi'$ lässt sich nun schreiben:

$$\xi\xi' = \varrho\left(\sqrt{a}\,x'' + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y''\right),$$

wenn man

$$x'' = xx' - \frac{b}{2}yx' - cyy', \quad y'' = xy' + ayx' + \frac{b}{2}yy'$$

setzt, d. h. der Punkt $(\xi\xi', \eta\eta')$ gehört wieder demselben Nebengitter wie (ξ', η') an, denn x'' und y'' sind für alle ganzzahligen Werthe von x, x', y, y' selbst ganze Zahlen, da

im Falle $d \equiv 0 \pmod{4}$ auch die Congruenz $b \equiv 0 \pmod{2}$ besteht.

Bei $d \equiv 1 \pmod{4}$, wobei gleichzeitig $b \equiv 1 \pmod{2}$ ist, erhält man in analoger Weise:

$$\xi\xi' = \varrho\left(\sqrt{a}\,x'' + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y''\right), \text{ wo}$$

$$x'' = xx' + \frac{1-b}{2}\,yx' - cyy' \qquad y'' = xy' + ayx + \frac{1+b}{2}\,yy'$$

ist.

Ein specieller Fall unseres letzten Satzes ist uns von früher her wohl bekannt, wir meinen die <u>Aufsuchung der Automorphien eines Gitters mit Hülfe der Pell'schen Gleichung</u>. Wir bemerkten bereits, daß die Pell'sche Gleichung darauf hinauskommt, die jedesmalige Hauptform $= \underline{1}$ zu setzen, also $x^2 - \frac{d}{4}y^2 = 1$, bez. $x^2 + xy + \frac{1-d}{4}y^2 = 1$. Aus diesen x, y stellten wir uns die Grössen:

$$\xi, \eta = x \pm y\frac{\sqrt{d}}{2}, \text{ resp. } \xi, \eta = x + y\frac{1 \pm \sqrt{d}}{2}$$

her.

Wir nannten dieselben *Einheiten*, weil ihre Norm gleich 1 ist. Wir können dieselben nach unserer jetzigen Terminologie als *Coordinaten der Einheitspunkte des Hauptgitters* bezeichnen, nämlich derjenigen Gitterpunkte, welche den „Abstand" 1 von O besitzen.

Mit den Einheiten ξ, η multiplicirten wir früher die Gitterzahlen ξ', η' eines beliebigen zur Discriminante d gehörigen Gitters. Es zeigte sich, dass dabei ein dem ursprünglichen congruentes Gitter entstand, dass wir also eine Automorphie des Gitters erhielten. Dieser Umstand erklärt sich jetzt einfach aus dem eben bewiesenen Satze.

Zunächst ist nach unserem Satze klar, das der Punkt $(\xi, \eta) \cdot (\xi', \eta')$ wieder dem Gitter (ξ', η') angehören muss. Während aber im allgemeinen durch Multiplication eines Punktes (ξ, η) des Hauptgitters mit den sämmtlichen

Punkten (ξ', η') ein dem Gitter $\xi' \eta'$ eingelagertes Gitter entsteht, dessen einzelne Maschen sich aus mehreren Maschen des ursprünglichen Gitters zusammensetzen, bringt es die Wahl des Punktes (ξ, η) in unserem Falle mit sich, daß wir ein dem ursprünglichen congruentes Gitter erhalten. In der That wird wegen $N(\xi) = 1$ auch $N(\xi \xi') = N(\xi')$. Der Abstand der Gitterpunkte von O wird also durch die Multiplication des Gitters mit dem Punkte (ξ, η) nicht geändert. Das neue Gitter wird daher dem alten congruent sein, so daß sich in der That eine Automorphie ergiebt. Ist (ξ, η) kein Einheitspunkt, so wird das neue Gitter mit dem alten nur ähnlich sein.

Wir betrachten endlich den Fall conjugirter Stammgitter, bezüglich derer wir den Satz aussprechen:

<u>Zahlen aus conjugirten Gittern geben multiplicirt Hauptzahlen</u>

(vorausgesetzt, daß wir an der früher verabredeten Orientirung conjugirter Gitter festhalten)

Sind die Gitterzahlen aus den richtig orientirten conjugirten Gittern:

$$\xi = \varrho\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right), \quad \eta = \frac{1}{\varrho}(\cdots\cdots),$$

$$\xi' = \frac{1}{\varrho}\left(\sqrt{a}\,x' + \frac{-b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y'\right), \quad \eta' = \varrho(\cdots\cdots),$$

so ergiebt sich

$$\xi\xi' = \left(a x x' - \frac{b}{2} x y' + \frac{b}{2} y x' - c y y'\right) + \frac{\sqrt{d}}{2}(x y' + y x')$$
$$= \left[a x x' - \frac{b+1}{2} x y' + \frac{b-1}{2} y x' - c y y'\right] + \frac{1+\sqrt{d}}{2}(x y' + y x').$$

Aus dieser Doppelgleichung folgt die Richtigkeit unseres Satzes sowohl für $d \equiv 0 \pmod{4}$ (erste Zeile) wie auch $d \equiv 1$ (mod 4) (zweite Zeile), da die Klammergrössen stets ganze Zahlen sind.

Für die Composition conjugirter Stammgitter folgern wir noch leicht den Satz:

<u>Conjugirte Stammgitter geben componirt das Hauptstammgitter.</u>

Denn das resultirende Gitter muß

ein Stammgitter sein und enthält überdies nach dem eben Bewiesenen Hauptzahlen, es muß also das Hauptstammgitter sein.

19. VI. 96. Die von uns begründete Composition der Gitter fassen wir in die symbolische Gleichung zusammen:

$$G \cdot G' = G''.$$

Dieselbe zeigt, daß unsere h Gitter

$$G, G', G'', \ldots G^{(h-1)}$$

ein _geschlossenes Ganzes_ bilden und daß wir bei der Composition immer wieder zu einem unserer h Elemente kommen. Die vorstehende Gleichung ist auch umkehrbar in dem Sinne daß wir zu G' und G'' in eindeutiger Weise ein zugehöriges G finden können. Dabei berücksichtigen wir, daß bei der Composition das _Hauptgitter_ G_0 die _Rolle der Einheit_ spielt und daß _zwei conjugirte Gitter_ G und G dementsprechend als _inverse Elemente_ angesehen

werden müssen. Wir können nämlich den Satz von pg.   in die symbolische Gleichung fassen

$$GG_0 = G \text{ oder } G_0 = 1.$$

und den Satz von pg.   in die folgende Gleichung:

$$G\bar{G} = G_0 = 1.$$

In Folge dessen erhalten wir aus der Compositionsgleichung $GG' = G''$, in dem wir rechts und links mit $\bar{G}'$ componiren:

$$G''\bar{G}' = GG'\cdot\bar{G}' = GG_0 = G.$$

Das Gitter G ist also in der That eindeutig durch G' und G'' bestim̄t. Endlich berücksichtigen wir, daß die Operation der Multiplication eine <u>commutative Operation</u> ist, so daß

$$GG' = G'G$$

wird. Alle diese Thatsachen fassen wir in die einfache Aussage zusammen:

<u>Unsere h Gitter bilden eine</u>

Gruppe vertauschbarer Elemente.

Die Eigenschaften dieser Gruppe sind u.a. studirt worden von

Schering: Die Fundamentalclassen der zusammensetzbaren arithmetischen Formen, Göttinger Abhandlungen Bd. 14.

und von

Frobenius und Stickelberger: Ueber Gruppen vertauschbarer Elemente, Crelle Bd 86, 1878.

Nebenbei bemerken Sie an dem Titel dieser Abhandlungen die Fortschritte, welche der Gruppenbegriff in den letzten Decennien gemacht hat. Während in der früheren Arbeit die specielle Beschaffenheit der Elemente, aus denen die Gruppe besteht, betont wird, abstrahirt die zweite Arbeit hiervon gänzlich und hebt nur ihre Gruppeneigenschaft hervor, wie solches der Allgemeinheit des Gruppenbegriffes in der That besser entspricht.

Wir führen hier eine Reihe einfacher

Sätze an, zu denen die genannten Autoren gelangen; die übrigens ganz einfachen Beweise sollen der Kürze halber fortgelassen werden.

1. Wir greifen irgend eines der h Gitter heraus und componiren dasselbe mit sich selbst. Dabei muss wegen der Endlichkeit der Gruppenelemente einmal, sagen wir nach k-maliger Composition, die Einheit auftreten. Wir bilden also:

$$\mathcal{G}, \mathcal{G}^2, \mathcal{G}^3, \ldots \mathcal{G}^k = 1.$$

Unser erster Satz lautet nun, <u>dass der „Grad" k nothwendig ein Theiler von h sein muss.</u>

2. Es könnte sein, dass zufälliger Weise $k = h$ wird. Ein solches Gitter nennen wir ein „<u>erzeugendes Gitter</u>" und bezeichnen dasselbe mit Γ. Wir können dann die ganze Reihe der Gitter in der Form

$$\Gamma, \Gamma^2, \Gamma^3, \ldots \Gamma^h = 1$$

anschreiben.

3. Wenn $k \neq h$ ist, so wird es jedenfalls ein Gitter geben, für welches k einen <u>maximalen Werth</u> hat. Wir schreiben dann zunächst die folgenden k Gitter auf:

$$T,\ T^2,\ \ldots T^k = 1.$$

Darauf suchen wir unter den übrigen Gittern dasjenige (T_1) auf, dem der grösste hier noch vorkommende Grad (k_1) zukommt. Wir können dann k_1 Gittern die Form geben:

$$T_1,\ T_1^2,\ \ldots T_1^{k_1} = 1.$$

Durch Combination dieser k_1 mit den früheren k Gittern ergeben sich $k_1 k,\ \delta$ Gitter

$$T^{\alpha} T_1^{\alpha_1} \begin{Bmatrix} \alpha \equiv 0, 1, \ldots k-1 \ (\text{mod.}\ k) \\ \alpha_1 \equiv 0, 1, \ldots k_1 - 1 \ (\text{mod.}\ k_1) \end{Bmatrix}.$$

4. Fahren wir so fort, so erhalten wir eine abbrechende Reihe von Gittern

$$T,\ T_1,\ T_2\ \ldots$$

bez. vom Grade

$k, k_1, k_2.$

Sämmtliche h Gitter stellen sich dann in der Gestalt dar:

$$\Gamma^{\alpha}\Gamma_1^{\alpha_1}\Gamma_2^{\alpha_2}\dots \begin{Bmatrix} \alpha \equiv 0, 1, \dots k-1 \pmod{k} \\ \alpha_1 \equiv 0, 1, \dots k_1-1 \pmod{k_1} \\ \alpha_2 \equiv 0, 1, \dots k_2-1 \pmod{k_2} \end{Bmatrix}$$

Dabei zeigt sich, daß die Zahlen k nicht nur der Ungleichung genügen:

$$h \geqq k \geqq k_1 \geqq k_2 \geqq \dots$$

sondern es ist auch in dieser Reihe jede Zahl ein Theiler der vorhergehenden.

5. Sind uns zwei Gitter in der Darstellung gegeben

$$\Gamma^{\alpha}\ \Gamma_1^{\alpha_1}\ \Gamma_2^{\alpha_2}\ \dots$$

$$\Gamma^{\beta}\ \Gamma_1^{\beta_1}\ \Gamma_2^{\beta_2}\ \dots,$$

so wird (wegen der Vertauschbarkeit der Elemente) das durch Composition entstehende Gitter ersichtlich dieses sein:

$$\Gamma^{\alpha+\beta}\ \Gamma_1^{\alpha_1+\beta_1}\ \Gamma_2^{\alpha_2+\beta_2}\ \ldots$$

Hier wird man die Exponenten $\alpha+\beta, \alpha_1+\beta_1$ ... natürlich immer mod k, bez. mod k_1 ... auf ihre kleinsten Reste reducieren.

Die Composition der Gitter verwandelt sich in eine Addition der Exponenten α und β.

6. Sollen die beiden vorhergenannten Gitter insbesondere conjugirt sein, so muss bei der Composition die Einheit entstehen. Es muss also allgemein sein:

$$\alpha_i \equiv -\beta_i \pmod{k_i}$$

7. Dementsprechend lassen sich die Ancepsgitter leicht charakterisiren als solche Gitter, deren Quadrat die Einheit ist. Soll also

$$\Gamma^{\alpha}\ \Gamma_1^{\alpha_1}\ \Gamma_2^{\alpha_2}\ \ldots$$

speciell ein Ancepsgitter vorstellen, so müssen die Congruenzen erfüllt sein:

$$\left|\begin{array}{l} 2\alpha \equiv 0 \pmod{k} \\ 2\alpha_1 \equiv 0 \pmod{k_1} \\ - - - - - \end{array}\right.$$

Wir fragen nach der Zahl der Ancepsgitter. Diese hängt offenbar davon ab, wie viele der Zahlen k_i gerade sind. Ist k_i ungerade, so hat die Congruenz

$$2\alpha_i \equiv 0 \pmod{k_i}$$

nur die eine Lösung $\alpha_i = 0$. Ist aber k_i gerade, so giebt es zwei mod k_i incongruente Lösungen, nämlich

$$\alpha_i = 0 \text{ und } \alpha_i = \frac{k_i}{2}.$$

Hiernach beträgt die Zahl der Ancepsgitter, wenn τ die Anzahl der in der Reihe $k, k_1, k_2 \ldots$ vorkommenden geraden Zahlen ist, einfach 2^τ.

Wir erläutern diese Dinge durch einige Zahlenbeispiele, welche wir aus den Tabellen von Cayley (vergl. ges. Werke Bd V pg. 141 ff.)

zusammenstellen. Wir wählen dabei Gitter von negativer Discriminante aus, weil uns diese wegen der Anwendung auf die Theorie der elliptischen Functionen besonders wichtig sind. Es sei zunächst

1. $d = -356 = -4 \cdot 89$.

Die Classenanzahl h ergiebt sich aus der Anzahl der reducirten Formen und diese aus der Anzahl der Zahlentripel a, b, c, für welche

$$|b| \leq a \leq c, \quad -356 = b^2 - 4ac.$$

Man findet die folgenden reducirten Formen:

a	b	c
1	0	89
2	2	45
3	± 2	30
5	± 2	18
6	± 2	15
7	± 6	14
9	± 2	10

Die beiden ersten Formen charakteri=

siren sich als Ancepsformen, speciell die erste als Hauptform. Die übrigen sind paarweise als conjugirte Formen zusammengeordnet. Die Zahl der reducirten Formen und daher die Classenanzahl beträgt 12.

Bei der Composition wollen wir mit der Form

$$\Gamma = (3, \pm 2, 30)$$

beginnen und die successiven Potenzen derselben bilden. Nach unserer obigen Regel für die Composition der zu den Formen (a, b, c) und (a', b', c') gehörigen Gitterzahlen, haben wir den grössten gemeinsamen Theiler μ der Zahlen

$$a = 3\ ,\ a' = 3\ ,\ \frac{b+b'}{2} = 2$$

zu suchen, welcher gleich 1 ist. Es wird also

$$\alpha = 3,\ \alpha' = 3\ ,\ \beta = 2.$$

Daraus folgt $a'' = 9$. Zur Berechnung von b'' haben wir die Congruenzen

$$b'' \equiv 2 \pmod 6$$

$$b'' \equiv 2 \pmod 6$$

$$4b'' \equiv 4(1-89) \pmod{36}$$ oder

$$b'' \equiv -88 \pmod 9$$ oder endlich

$$b'' \equiv +2 \pmod 9.$$

Die gemeinsame Lösung dieser drei Congruenzen ist offenbar

$b'' = 2$ oder allgemeiner $b'' = 2 + 18m$.

Die dem Gitter T^2 entsprechende Form wird also

$$(9, 2, 10),$$

welche sich zufälliger Weise unter unsern reducirten Formen vorfindet.

Wir gehen darauf zu T^3 und bilden zu dem Zwecke:

$$(9, 2, 10)\ (3, 2, 30).$$

Jetzt haben wir

$$a = 9,\ a' = 3,\ \frac{b+b'}{2} = 2,$$

also $\mu = 1$ und

$$\alpha = 9,\ \alpha' = 3,\ \beta = 2,\ a'' = 27.$$

Die Congruenzen zur Bestimmung von b'' sind

$$b' \equiv 2 \pmod{6}$$
$$b'' \equiv 2 \pmod{18}$$
$$b'' \equiv 20 \pmod{27},$$

woraus wir schliessen

$b'' \equiv 20$ bez. $b'' = 20 + m.54$.

Die dem Gitter T^3 entsprechende Form wird also

$$(27, 20, 7) = 27x^2 + 20xy + 7y^2$$

Diese Form ist noch nicht reduziert. Sie wird es aber mittelst der unimodularen Substitution

$$x = -y'$$
$$y = x' + y'.$$

Wir haben nämlich

$$27x^2 + 20xy + 7y^2 = 7x'^2 + (-20+14)x'y' + (27-20+7)y'^2 = (7, -6, 14).$$

Fahren wir in dieser Weise fort, so erkennen wir, dass wir successive unsere 12 Formen aus unserem Ausgangsgitter T ableiten können. Es liegt hier also der pag 146 sub 2 hervorgehobene besondere Fall vor. Die Reihenfolge,

in der unsere 12 reducirten Formen erhalten werden, ist diese

$\Gamma^0 = (1, 0, 39)$	$\Gamma^6 = (2, 2, 45)$
$\Gamma^1 = (3, 2, 30)$	$\Gamma^7 = (6, 2, 15)$
$\Gamma^2 = (9, 2, 10)$	$\Gamma^8 = (5, -2, 18)$
$\Gamma^3 = (7, -6, 14)$	$\Gamma^9 = (7, 6, 14)$
$\Gamma^4 = (5, 2, 18)$	$\Gamma^{10} = (9, -2, 10)$
$\Gamma^5 = (6, -2, 15)$	$\Gamma^{11} = (3, -2, 30)$

Übrigens bewähren sich noch die sub 7 und 8 angegebenen Regeln über die conjugirten – und die Ancepsgitter. In der vorstehenden Reihe sind je zwei solche Gitter Γ^α und Γ^β conjugirt, für welche $\alpha + \beta = h = 12$, während die Gitter Γ^0 und Γ^6 Anceps-Gitter sind, da ihre Exponenten der Congruenz $2a \equiv 0 \pmod{12}$ genügen. Die Zahl der Ancepsgitter beträgt, wie es sein muß, $2^\tau = 2$, indem die in unserem Fall allein vorhandene Zahl $k = 12$ eine gerade Zahl ist.

<u>Als zweites Beispiel wählen wir</u>

2.) $d = -972 = -4 \cdot 243.$

Die Classenanzahl ist hier $h = 9$. Die vorhandenen neun reducirten Formen schreiben wir sogleich nach ihrer Erzeugungsweise in die Tabelle zusammen.

$\Gamma^0 = (1,0,243)$; $\Gamma^0\Gamma_1^1 = (4,2,61)$; $\Gamma^0\Gamma_1^2 = (4,-2,61)$;
$\Gamma^1 = (7,6,36)$; $\Gamma^1\Gamma_1^1 = (13,-4,19)$; $\Gamma^1\Gamma_1^2 = (9,-6,28)$;
$\Gamma^2 = (7,-6,36)$; $\Gamma^2\Gamma_1^1 = (9,6,28)$; $\Gamma^2\Gamma_1^2 = (13,4,19)$.

Hier haben wir zwei erzeugende Gitter Γ und Γ_1 mit den Exponenten $k = 3$ und $k_1 = 3$. Wiederum sind diejenigen Gitter paarweise conjugirt, für welche

$\alpha + \beta \equiv 0 \pmod 3$ und gleichzeitig
$\alpha_1 + \beta_1 \equiv 0 \pmod 3$

ist. Da die Anzahl τ der in der Reihe $k = 3$, $k_1 = 3$ vorkommenden geraden Zahlen 0 beträgt, so wird die Anzahl der Ancepsgitter $2^0 = 1$. In der That giebt es hier keine andere An-

cepsform als die Hauptform.

25. VI. 96. Wir benutzen jetzt die Gleichung

$$G = T^{\alpha} T_1^{\alpha_1} \dots$$

um die Orientirung unserer h Gitter G definitiv festzulegen. Bisher haben wir nur die Lage des Hauptgitters und die gegenseitige Lage zweier conjugirter Gitter bestimmt. Das Entsprechende soll jetzt allgemein für jedes Gitter geschehen. U. zw. wollen wir es so einrichten, daſs der folgende Satz Gültigkeit bekommt:

<u>Zwei Punkte aus orientirten Gittern geben multiplicirt wieder einen Gitterpunkt in richtiger Orientirung.</u>

Wir beginnen mit dem erzeugenden Gitter T. Wenn wir dieses k-mal mit sich selbst componiren, so ergiebt sich, wie wir sahen, das Hauptgitter. Dem soeben genannten Princip entsprechend müssen wir also T so orientiren, daſs

Γ^k das Hauptgitter in der früher verabredeten Orientirung ergiebt. Ebenso verfahren wir mit $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots$ Alle übrigen Gitter aber orientiren wir in der Weise, wie sie aus $\Gamma, \Gamma_1, \ldots$ nach unserer obigen Compositionsformel entstehen. — Dann ist unsere Absicht vollkommen erreicht. In der That entsteht durch Multiplication aus zwei Punkten der Gitter $\Gamma^\alpha \Gamma_1^{\alpha_1} \ldots$ bez. $\Gamma^\beta \Gamma_1^{\beta_1} \ldots$ ein Punkt aus dem Gitter $\Gamma^{\alpha+\beta} \Gamma_1^{\alpha_1+\beta_1} \ldots$, letzteres in derjenigen Lage genommen, die wir diesem Gitter ohnehin zugewiesen haben.

Wir mögen noch bemerken, dass unsere frühere Verabredung über die conjugirte Lage conjugirter Gitter in unserer jetzigen Orientirungsregel enthalten ist. Da nämlich zwei conjugirte Gitter die Form haben $\Gamma^\alpha \Gamma_1^{\alpha_1} \ldots$ bez. $\Gamma^{-\alpha} \Gamma_1^{-\alpha_1} \ldots$, so setzen sich ihre Azimuthalfactoren aus lauter reciproken Bestand-

theilen zusammen. Sie liegen also nach unserer jetzigen Regel von selbst symmetrisch gegen die u- und v-Axe.

Die so erhaltene Figur, in der unsere h Gitter in bestimmter Weise gelagert sind, nennen wir <u>die Normalfigur</u>; sie liegt allen späteren Betrachtungen, in's Besondere der Theorie der singulären elliptischen Gebilde zu Grunde.

Auf die Herstellung der Normalfigur im Einzelnen müssen wir noch näher eingehen. Wir müssen nämlich angeben, wie wir es erreichen, daß $T^k, T'^k, \ldots$ gerade mit dem Hauptgitter zusammenfällt. Wir wollen dabei der Deutlichkeit wegen den Fall eines positiven und negativen d getrennt behandeln und mit den negativen Werthen von d beginnen.

<u>1. $d < 0$.</u> Wir nehmen die Fälle $d = -3$ und $d = -4$ vorweg. Die Gitterzahlen ξ, η des Hauptgitters

haben die Form

$$d = -3 : \; x \pm \frac{1 \pm \sqrt{-3}}{2} y.$$

$$d = -4 : \; x \pm i y.$$

Es sind dieses die allereinfachsten Beispiele von ganzen algebraischen Zahlen eines quadratischen Zahlkörpers. Die Bedingungsgleichungen der reducirten Formen zeigen nun sofort, dass in diesen Fällen die Classenanzahl $h = 1$ wird. Es sind also keine Nebengitter vorhanden; die ganze Normalfigur reducirt sich auf die Figur des Hauptgitters. Umgekehrt also dürfen wir unsere Normalfigur für $|d| > 4$ als die naturgemässe Verallgemeinerung der einfachen Gitterfiguren im Falle $d = -3$ und $d = -4$ ansehen.

Wir überlegen nun, wie im Falle $|d| > 4$ die Orientirung der Nebengitter im Einzelnen vorzunehmen ist. Es handelt sich dabei um die Bestimmung der

(reellen) Grösse φ in dem Ausdrucke für eine allgemeine Gitterzahl von Γ:

$$e^{i\varphi}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right),$$

oder auch in dem specielleren Ausdrucke

$$e^{i\varphi}\sqrt{a},$$

welcher eine Basiszahl des Gitters Γ bedeutet.

Componiren wir das Gitter Γ k-mal mit sich selbst, so entsteht aus dem letzgenannten Punkte:

$$e^{ki\varphi}\sqrt{a}^{\,k}.$$

Der zugehörige Gitterpunkt gehört aber dem Hauptgitter an und findet sich in diesem etwa unter dem Azimuthe Φ vor. Dabei haben wir die Automorphien des Gitters Γ einerseits, des Hauptgitters andrerseits zu beachten. Wenn, wie wir voraussetzen, $d < -4$ ist, so besteht die ein-

zige vorhandene Automorphie in einer Drehung des Gitters durch den Winkel π. Es findet sich daher der fragliche Punkt $e^{ki\varphi}\sqrt{a}^k$ in dem Hauptgitter ausser unter dem Azimuthe Φ nur noch unter dem Azimuthe $\Phi + \mu\pi$ vor, wo μ irgend eine ganze Zahl bedeutet. Soll also $e^{ki\varphi}\sqrt{a}^k$ direct in einen correspondierenden Punkt des Hauptgitters übergehen, so muss

$$k\varphi = \phi + \mu\pi$$

oder

$$\varphi = \frac{\phi + \mu\pi}{k}$$

gewählt werden. Andrerseits können wir uns darauf beschränken, μ die zu k incongruenten Werthe $\mu = 0, 1, 2, \ldots k-1$ durchlaufen zu lassen, um alle möglichen mit unserer obigen Festsetzung verträglichen Orientirungen von Γ zu erhalten. Denn auch das

Gitter Γ besitzt doch die vorher genannte Automorphie, so dass zwei Orientirungen, welche sich nur um ein Vielfaches von π unterscheiden, als identisch gelten müssen. <u>In Folge dessen bekommen wir gerade k zulässige Orientirungen des Gitters Γ.</u> Von diesen greifen wir irgend eine heraus und legen sie unserer Normalfigur zu Grunde.

Dasselbe machen wir mit dem erzeugenden Gitter Γ_1. Dieses geht durch k_1-malige Composition in das Hauptgitter über. Demnach müssen wir das Azimuth φ_1 dieses Gitters so wählen, dass

$$k_1 \varphi_1 = \Phi_1 + \mu_1 \pi$$

oder

$$\varphi_1 = \frac{\Phi_1 + \mu_1 \pi}{k_1}$$

wird. <u>Für Γ_1 ergeben sich also k_1 zulässige Lagen.</u> Ebenso für Γ_2 k_2 Lagen etc.

<u>Im Ganzen ergeben sich so</u>

$k\,k_1\,k_2 \ldots = h$ verschiedene Möglichkeiten, unsere Normalfigur zu entwerfen. Indem wir bei der Orientirung der Gitter $\Gamma, \Gamma_1, \ldots$ den ganzen Zahlen μ willkürliche, aber bestimmte Werthe beilegen, greifen wir unter den h Möglichkeiten eine bestimmte, aber beliebige heraus und halten an dieser für die Folge fest.

Die nunmehr definirten Nebengitterzahlen mögen wir noch arithmetisch characterisiren. Sie gehören nicht direkt dem Körper $\sqrt{d}$ an, wohl aber je einem Nebenkörper desselben, welcher dadurch entsteht, dafs wir zu $\sqrt{d}$ bez. die Irrationalitäten

$$\sqrt{a}\; e^{i\frac{\phi+\mu\pi}{k}}, \quad \sqrt{a_1}\; e^{i\frac{\phi_1+\mu\pi}{k_1}}, \quad \ldots$$

adjungiren. In der That lassen sich alle Gitterzahlen von Γ rational durch $\sqrt{d}$ und $\sqrt{a}\, e^{i\frac{\phi+\mu\pi}{k}}$, alle Gitterzahlen von Γ_2 durch $\sqrt{d}$ und $\sqrt{a_1}\, e^{i\frac{\phi_1+\mu\pi}{k}}$ etc. auf-

cauen.

Überdies sind alle Nebengitterzahlen algebraische ganze Zahlen. Beispielsweise liefert jeder Punkt von Γ in die k^{te} Potenz erhoben, einen Punkt des Hauptgitters. Da nun die Zahlen des Hauptgitters einer quadratischen Gleichung genügen, deren erster Coefficient 1 ist, so befriedigen die Zahlen von Γ eine Gleichung $2k^{ten}$ Grades deren erster Coefficient gleichfalls die Einheit ist.

Wir fügen noch einen Hülfssatz hinzu, der uns später nützlich sein wird. Wir behaupten:

Ein Ausdruck von der Form der Nebengitterzahlen, in welchem $x = x_0$ und $y = y_0$ als rational vorausgesetzt werden, kann nur dann eine ganze algebraische Zahl sein, wenn x_0 und y_0 ganze Zahlen sind.

Zum Beweise denken wir uns den fraglichen Ausdruck

$$1)\quad \varrho\left(\sqrt{a}\,x_0 + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y_0\right)$$

mit den Zahlen des zu dem Gitter (a, b, c) conjugirten Gitters multiplicirt, d. h. mit

2) $\frac{1}{\varsigma}\left(\sqrt{a}\,x + \frac{-b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right)$,

wo x und y beliebige ganze rationale Zahlen bedeuten sollen. Bei der Multiplication ergiebt sich ein Ausdruck von der Form der Hauptzahlen, nämlich, je nachdem $d \equiv 0$ oder $\equiv 1 \pmod 4$ ist:

3) $X + Y\frac{\sqrt{d}}{2}$ bez $X + Y\frac{1+\sqrt{d}}{2}$;

hierbei wird nach pg. 142.

4) $Y = Xy_0 + yx_0$.

Nun setzen wir voraus, dass 1) eine ganze algebraische Zahl ist. Durch Multiplication mit dem Ausdrucke 2), welcher eo ipso eine ganze algebraische Zahl darstellt, entsteht wieder eine ganze algebraische Zahl. Die Ausdrücke 3) sind daher ganze Zahlen des Körpers $\sqrt{d}$. Infolgedessen müssen X und

y ganze rationale Zahlen sein u. zw. für alle ganzzahligen Werthe von x und y. Daraufhin zeigt aber die Gleichung 4), dass auch x_0 und y_0 ganze Zahlen sein müssen. Setzen wir nämlich etwa $x=1, y=0$ oder $x=0, y=1$, so sehen wir, dass y_0 bez. x_0 einen ganzzahligen Werth besitzen.

2. $d>0$. Bei positiver Discriminante liegen die Dinge ganz ähnlich, nur drücken sie sich hier etwas anders aus. Der Unterschied liegt darin, dass die Azimuthalfactoren ϱ hier reelle Zahlen vorstellen und dass jetzt stets nicht-triviale Automorphien vorhanden sind. Letztere ergeben sich wie wir wissen aus der kleinsten Lösung (t_0, u_0) der Pell'schen Gleichung in der Form

$$\left(\frac{t_0+u_0\sqrt{d}}{2}\right)^{\mu}$$

Da die Automorphien nur von der Grösse d abhängen, so sind

sie dem Hauptgitter und den Nebengittern gemeinsam. Geometrisch konnten wir sie als Pseudodrehungen um beliebige Multipla des Pell'schen Winkels

$$i \log\left(\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}\right)$$

auffassen, welche unsere Gitter mit sich zur Deckung bringen. Der Maaßbestimmung liegt dabei, vermöge unserer obigen geometrischen Verabredungen, das Linienpaar $u^2 - v^2 = 0$ zu Grunde.

Bei der Frage nach der richtigen Orientirung von T handelt es sich nun um die Bestimmung der reellen und, wie wir hinzufügen können, auch positiven Grösse ρ in dem allgemeinen Ausdrucke der Gitterzahlen von T:

$$\rho\left(\sqrt{a}\,x + \frac{b + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y\right).$$

(Ein Vorzeichenwechsel von ρ würde die Lage des Gitters nicht ändern, sondern nur bedeuten, daß wir in einem anderen

Sector der Linien $u \pm v = 0$ operiren.)

Im Besonderen genügt es, den Basispunkt $x = 1$, $y = 0$, d. h. den Punkt

$$\varrho\sqrt{a}$$

richtig zu legen, woraus dann die richtige Orientirung des ganzen Gitters von selbst folgt.

Durch k-malige Composition von Γ ergiebt sich das Hauptgitter. Möge nun ein Punkt des Hauptgitters, welcher hierbei dem durch Potenzirung aus $\varrho\sqrt{a}$ entstehenden Punkte ($\varrho^k \sqrt{a}^k$) entspricht, unter dem Pseudo-Azimuthe P orientirt sein (wo wir P wieder als positive Zahl voraussetzen). Es giebt dann noch unendlich viele andere Punkte des Hauptgitters, welche demselben Punkte entsprechen und deren Pseudo-Azimuth durch die Formel

$$P\left(\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}\right)^{\mu}$$

bestimmt sind. Die Einheit $\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}$ setzen wir hier gleichfalls als posi-

tive Grösse voraus. Soll nun bei der Composition das Gitter Γ direct in das Hauptgitter übergehen, so müssen wir haben

$$\rho^k = P\left(\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}\right)^\mu$$

oder

$$\rho = P^{\frac{1}{k}}\left(\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}\right)^{\mu/k}.$$

Hier durchläuft μ alle ganzen Zahlen. Es genügt aber wieder, nur k modulo k incongruente Werthe von μ zu berücksichtigen etwa die Werthe $\mu = 0, 1, \ldots k-1$; in der That geben zwei modulo k congruente Werthe von μ zu zwei Werthen von ρ Anlass, welche sich lediglich um eine ganze Potenz von $\frac{t_0 + u_0\sqrt{d}}{2}$ unterscheiden; die entsprechenden Gitter Γ sind aber ohne weiteres identisch. Der an sich mehrdeutige Ausdruck $P^{1/k}$ ist durch unsere Verabredung, nach der ρ eine reelle und posi-

tive Zahl sein soll, eindeutig bestimmt. Hiernach liefert unsere Formel wiederum <u>k zulässige Orientirungen des Gitters Γ.</u>

Ebenso finden wir natürlich für die Gitter $\Gamma_1, \Gamma_2 .. \; k, k_2 ..$ mögliche Lagen. <u>Unsere Normalfigur lässt sich daher auch im Falle $d > 0$ auf $h = k \; k, k_2 \; ..$ Arten entwerfen.</u> Eine von diesen Arten wird für das Folgende willkürlich ausgewählt.

Auch was wir oben über den arithmetischen Charakter der Nebengitterzahlen sagten, gilt unverändert für den Fall einer negativen Discriminante.

Wir resumiren nochmals die Eigenschaften unserer Normalfigur, indem wir sagen:

<u>Unsere Normalfigur besteht aus h Gittern. Je zwei conjugirte Gitter liegen bezüglich der Coordinatenaxen symmetrisch gegen das Hauptgitter. Das Haupt-</u>

gitter selbst ebenso wie die Anceps-Gitter liegen symmetrisch gegen sich selbst. Gegenüber der Multiplication bilden die Punkte der Normalfigur ein abgeschlossenes Ganze, indem je zwei Punkte miteinander multiplicirt einen dritten Punkt ergeben, welcher wieder der Normalfigur angehört.

Die Theilbarkeitsgesetze im Gebiete der orientirten Gitterzahlen.

Wir geben nun unserer Betrachtung eine neue Wendung. Wir wollen nämlich das durch die Normalfigur definirte Zahlenmaterial auf die Theilbarkeitsgesetze untersuchen. Das allgemeine Resultat, zu welchem wir gelangen werden, ist dieses:

Die Theilbarkeitsgesetze der gewöhnlichen Zahlentheorie (eindeutige Zerlegung in Primfactoren) behalten in unserem Gebiete ihre unverän-

derte Gültigkeit.

Wir erinnern zunächst kurz an die Theilbarkeit im gewöhnlichen Zahlengebiete.

Man nennt eine ganze Zahl theilbar durch eine zweite, wenn der Quotient wieder eine ganze Zahl ist. Man bezeichnet ferner als Einheiten solche Zahlen, durch welche die 1 theilbar ist, und als Primzahlen solche, welche ausser durch sich selbst nur durch Einheiten getheilt werden können. In dem gewöhnlichen Zahlengebiete giebt es nur zwei Einheiten, nämlich die Zahlen + 1 und − 1.

Der Fundamentalsatz der gewöhnlichen Zahlentheorie besagt nun:

Jede ganze Zahl m lässt sich auf eine und nur auf eine Weise in ein Produkt von Primzahlen zerlegen, wobei natürlich Einheiten in beliebiger Weise den einzelnen Factoren hinzugefügt

werden können, wenn nur das Produkt derselben insgesammt + 1 ist.
Das gewöhnliche Zahlengebiet

-3 -2 -1 0 1 2 3 4

mögen wir etwa gleichfalls geometrisch auffassen als ein Gitter von einer Dimension. Dadurch wird die Analogie mit unserem jetzigen Zahlengebiete klar. Wir haben jetzt nicht ein eindimensionales, sondern ein zweidimensionales Gebiet zu betrachten und in diesem nicht ein Gitter, sondern eine endliche Anzahl von Gittern. Gleichzeitig soll hiermit angedeutet werden, das wir bei der Verallgemeinerung der gewöhnlichen Theilbarkeitsgesetze bei dem zweidimensionalen Gebiete nicht stehen zu bleiben brauchen, sondern auch drei-dimensionale, vier-dimensionale Gitter etc. betrachten können.

Wir übertragen nun die Definitionen der gewöhnlichen Zahlentheo-

rie auf unser zweidimensionales Gebiet. Dabei werden wir, strenge genommen, „Punkt" statt „Zahl" sagen müssen.

1. Ein Punkt unseres Zahlengebietes heisst theilbar durch einen anderen, wenn der Quotient beider ein ganzzahliger Punkt ist, (d. h. ein Punkt, dessen Coordinaten ganze algebraische Zahlen sind).

2. Als „Einheitspunkt" bezeichnen wir solche Punkte, durch welche der Punkt (1,1) theilbar ist. Die Einheitspunkte sind allgemein gegeben durch die Formel:

$$\varepsilon = \left(\frac{t_0 + u_0 \sqrt{d}}{2}\right)^u \qquad \bar{\varepsilon} = \left(\frac{t_0 - u_0 \sqrt{d}}{2}\right)^u,$$

wo t_0 und u_0 bestimmte ganzzahlige Lösungen der Pell'schen Gleichung bedeuten.

Wie wir wissen, giebt es bei positivem d unendlich viele Einheitspunkte, bei negativem d nur eine endliche Anzahl.

3. Wir nennen „Primpunkte" sol-

che Punkte $(\pi, \bar{\pi})$, welche durch keine anderen Punkte theilbar sind, als durch die Einheitspunkte und durch sich selbst.

4. Zwei Punkte heissen <u>relativ prim</u>, wenn es ausser den Einheitspunkten keine Punkte giebt, die in beiden aufgehen.

5. Ein Punkt (ξ, η) heisst der grösste gemeinsame Theiler zweier Punkte $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2)$, wenn die Punkte

$$\left(\frac{\xi_1}{\xi}, \frac{\eta_1}{\eta}\right), \left(\frac{\xi_2}{\xi}, \frac{\eta_2}{\eta}\right)$$

ganzzahlige relativ prime Punkte sind.

Nachdem diese Definitionen vorausgeschickt sind, können wir dazu übergehen, die elementaren Rechenoperationen für unsere Gitterzahlen zu studiren. Wir betrachten

1. <u>Addition und Subtraction.</u>

Bezüglich dieser Operationen können wir nur das negative Resultat wiederholen, dass wir bereits pag 119 ausgesprochen haben,

dafs wir nämlich bei Anwendung derselben im allgemeinen unseren Zahlencomplex verlassen. Wenn wir also an der Beschränkung festhalten, dafs die vorzunehmenden Operationen immer wieder auf Punkte der Normalfigur führen, so sind Addition und Subtraktion von Gitterpunkten nicht gestattet, abgesehen von der selbstverständlichen Ausnahme, dafs die Punkte <u>demselben</u> Gitter angehören.

2. <u>Multiplication.</u> Diese Operation ist im Gegensatz zu den beiden eben genannten uneingeschränkt ausführbar, d. h. wir bekommen durch Multiplication zweier beliebiger Punkte unserer Normalfigur immer wieder einen Punkt derselben, wie wir bereits eingehend nachgewiesen haben.

3. <u>Division.</u> Bezüglich der Division der Gitterpunkte gilt der folgende Satz:

<u>Ist ein Gitterpunkt durch einen</u>

anderen theilbar, so ist der Quotient wieder ein Gitterpunkt.

Zu dem Beweise der folgenden Sätze bemerken wir ein für allemal, daß wir immer nur die auf die eine Gitterzahl (ξ) bezüglichen Gleichungen hinschreiben wollen, während wir in Gedanken durchaus an der Auffassung festhalten, daß jedem Gitterpunkte zwei Coordinaten (ξ, η) zugehören.

Es sei die Zahl ξ' aus dem Gitter G' durch die Zahl ξ aus dem Gitter G theilbar. Wir haben dann den Quotienten $\frac{\xi'}{\xi}$ zu betrachten, der nach Voraussetzung eine ganze algebraische Zahl ist. Um demselben nun zur besseren Beurtheilung einen rationalen Nenner zu geben, erweitern wir ihn mit der zu ξ conjugirten Zahl $\bar{\xi}$. Ist $\xi\bar{\xi} = r$, wo r eine ganze rationale Zahl bedeutet, so ist

$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{\xi'\bar{\xi}}{r}$$

Nun liegt $\bar{\xi}$ in dem zu G conjugirten Gitter $\bar{G}$, also $\xi'\bar{\xi}$ in dem Gitter $G'\bar{G}$, es sei etwa:

$$\xi'\bar{\xi} = \rho\left(\sqrt{a}\,x_0 + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y_0\right).$$

Dann ist

$$\frac{\xi'}{\xi} = \frac{\xi'\bar{\xi}}{r} = \rho\left(\sqrt{a}\cdot\frac{x_0}{r} + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,\frac{y_0}{r}\right).$$

Da aber $\frac{\xi'}{\xi}$, wie wir vorausgesetzt haben, eine ganze algebraische Zahl sein soll, müssen nach unserem Hülfssatze pag 165 auch $\frac{x_0}{r}$, $\frac{y_0}{r}$ ganze rationale Zahlen sein, d. h. auch $\frac{\xi'\bar{\xi}}{r}$ oder $\frac{\xi'}{\xi}$ liegt in dem Gitter $G'\bar{G}$.

4. Eindeutige Zerlegung in Primpunkte.

Wir können jetzt dazu übergehen, unsere Betrachtungen über die Gitterpunkte zu krönen, indem wir folgendes Fundamentaltheorem beweisen:

Sofern wir von der willkürlichen Wahl hinzutreten der Ein-

theilspunkte absehen, lässt sich irgend ein Gitterpunkt unserer Normalfigur nur auf eine bestimmte Weise in Primpunkte zerlegen.

Den Beweis dieses Satzes führen wir in derselben Weise, wie es in der elementaren Zahlentheorie geschieht. Hier stützt man sich auf den Algorithmus der Aufsuchung des grössten gemeinsamen Theilers zweier ganzer Zahlen. Dementsprechend wollen wir uns auch hier fragen: Wie finden wir den grössten gemeinsamen Theiler zweier beliebig gegebener Gitterzahlen ξ und ξ'?

Dabei wollen wir an die hergebrachte Terminologie anknüpfen. Diese ist nur vom Standpunkte der historischen Entwickelung aus zu verstehen. Ursprünglich beschäftigte man sich ausschliesslich mit den Zahlen des Hauptgitters, um so mehr, als diese in den einfachsten Fällen $d = -3$ und $d = -4$ zugleich die allgemein-

sten Gitterzahlen darstellen. Diese Zahlen nannte man wirkliche Zahlen. Bei der Behandlung der höheren Fälle zeigte sich aber, dass man mit diesen Zahlen nicht auskommt, sondern auch die Zahlen der Nebengitter hinzunehmen muss, wenn man die eindeutige Zerlegbarkeit in Primfactoren aufrecht erhalten will; diese Nebengitterzahlen nannte man im Gegensatz ideale Zahlen.

Eine neue Auffassung wurde in diesen Theil der Zahlentheorie durch Dedekind hineingetragen. Dedekind bemerkte, dass man die Betrachtung dennoch auf das Hauptgitter beschränken kann, dass man nämlich jeder Nebenzahl sozusagen ein Bildgitter entsprechen lassen kann, welches in dem Hauptgitter enthalten ist. Dieses Bildgitter erzeugen wir auf folgende Weise. Wir multipliciren die Nebenzahl ξ mit allen Zahlen des conjugir-

ten Gitters. Dadurch erhalten wir nach Satz pag 182 die Eckpunkte eines Gitters, welches dem Hauptgitter eingelagert ist. Wir bemerken, dafs dasselbe dem eben benutzten conjugirten Gitter ähnlich ist, es entsteht nämlich dadurch, dafs wir jenes in einem bestimmten Verhältnisse vergrössern und um einen gewissen (durch den Azimuthalfactor von ξ gegebenen) Winkel verdrehen.

Der Inbegriff der ξ-Coordinaten dieses Gitters nennt Dedekind ein „Ideal"

Diese Terminologie drückt eigentlich, dem Wortlaute nach, das Umgekehrte aus von dem, was sie ausdrücken sollte. Wenn man sich überhaupt auf den Standpunkt stellen will, dafs die Zahlen des Hauptgitters allein wirklich, die der Nebengitter ideal sind, so müsste man doch unser Bildgitter, welches die ideale Zahl realiciren soll und welches ganz aus „wirklichen Zahlen"

besteht, eher ein „Real" nennen. Dieser Widerspruch zwischen Ausdruck und Sinn wird besonders fühlbar, wenn diese Zahl ξ im Besonderen eine Hauptzahl ist. Man wird der Gleichförmigkeit wegen auch diesen Zahlen ein Bildgitter entsprechen lassen. Wir haben dann ein reales Gegenbild einer schon an sich realen Grösse. Trotzdem wird ein solches Gitter „Hauptideal" genannt, wodurch der Anschein erweckt wird, alsob ein solches Gitter besonders wenig real wäre.

Wie dem auch sei, jedenfalls werden wir die Terminologie und noch in höherem Maasse den Gedankengang der Dedekind'schen Theorie für unsere Zwecke verwenden. Um dem Dedekind'schen „Ideal" näher zu kommen, können wir für „Bildgitter" etwa Idealgitter sagen.

Das Erste, was wir jetzt näher zu untersuchen haben, ist

<u>die Beziehung zwischen den Gitterzahlen und Idealgittern.</u>

Wir werfen in dieser Hinsicht zwei Fragen auf:

1. Ist durch ein gegebenes Idealgitter eine zugehörige Gitterzahl bestimmt?

2. Ist durch eine gegebene Gitterzahl ein zugehöriges Idealgitter bestimmt?

Ad 1. Die Antwort auf die erste Frage lautet, daß das Idealgitter nicht völlig eine bestimmte Gitterzahl charakterisirt, daß nämlich <u>alle nur durch Einheiten verschiedenen Punkte unserer Figur als Bildgitter dasselbe Idealgitter liefern.</u>

Sei nämlich $\mathfrak{J}$ ein Idealgitter, dem die Gitterzahl ξ entspricht, so daß

$$\mathfrak{J} = \xi \cdot \mathfrak{G}$$

ist, wo $\mathfrak{G}$ ein Gitter unserer Normalfigur bedeutet.

Wir fragen, giebt es noch eine andere Gitterzahl ξ' derart, daß auch

$$\mathfrak{J} = \xi' \cdot \mathfrak{G}'$$

ist, wo G' wiederum ein Gitter unserer Normalfigur bedeutet.

Hier können wir nun zunächst behaupten, dass die Gitter G und G' identisch sein müssen. Da sie nämlich durch Multiplication mit ξ, resp. ξ' d. h. durch Ausübung von Ähnlichkeitstransformationen, in dasselbe Gitter $\mathfrak{J}$ übergehen, so müssen sie jedenfalls ähnlich sein. Da aber beide unserer Normalfigur angehören sollen, müssen auch die Inhalte ihrer Fundamentalparallelogramme gleich sein, d. h sie müssen überhaupt identisch sein.

Die beiden Ausdrücke

$$\xi G \text{ und } \xi' G$$

stellen nun dasselbe Gitter dar, es muss daher der eine aus dem anderen durch eine Automorphie, d. h. Multiplication mit einer Einheit ε hervorgehen, d. h. es muss

$$\xi' G = \varepsilon \xi G \text{ sein, oder } \xi' = \varepsilon \xi .$$

Dies Resultat können wir so in Worte fassen:

<u>Durch ein gegebenes Idealgitter ist die Gitterzahl ξ nur bis auf hinzutretende Einheitsfactoren bestimmt.</u>

Ad 2. Unsere zweite Frage müssen wir bejahen. Wir werden nämlich sogleich für das zu einer Gitterzahl gehörige Idealgitter eine Eigenschaft kennen lernen, vermöge deren dasselbe unzweideutig festgelegt ist. Die bisherige Definition des Ideals ist insofern nicht ohne Weiteres eindeutig, als es ja vorkommen könnte, daß in unserer Normalfigur der durch das Ideal abzubildende Gitterpunkt mehreren unserer h Gitter gleichzeitig angehörte. Jenachdem wir ihn dann dem einen oder anderen dieser Gitter zuzählten, würden wir bei der Bildung des Ideals zu verschiedenen Ausdrücken

geführt werden.

Die Eigenschaft des Idealgitters, um welche es sich handeln soll, ist folgende: Das nach unseren früheren Regeln zu einem Gitterpunkte ξ hinzuconstruirte Idealgitter ist der Inbegriff aller durch ξ teilbaren Hauptzahlen.

Beweis: Erstens ist jede Zahl des Idealgitters eine durch ξ theilbare Hauptzahl.

Umgekehrt: Ist eine beliebige Hauptzahl ω durch ξ theilbar und ξ in dem Gitter G enthalten, so ist $\frac{\omega}{\xi}$ nach Satz pag 178 in dem Gitter $H \cdot G$ oder $\bar{G}$ gelegen, wo $\bar{G}$ das zu G conjugirte Gitter bedeutet, d. h. ω wird erzeugt durch Multiplication von ξ mit einer Zahl des conjugirten Gitters, was wir eben behauptet haben.

Nehmen wir nun an, es gäbe zu einem Gitterpunkte zwei verschiedene Ideale! Wir erkennen sofort, dafs diese Annahme

absurd ist, denn beide als verschie-
den vorausgesetzte Idealgitter müs-
sen mit dem Inbegriff der durch
unsere Gitterzahl theilbaren Haupt-
zahlen zusammenfallen. Mithin
giebt es zu jedem Gitterpunkte un-
serer Figur nur ein bestimmtes
Idealgitter.

Eine unmittelbare Folge dieses
Satzes ist ersichtlich die, <u>daß kei-
ne zwei Gitter unserer Figur (vom
Anfangspunkte abgesehen) einen
Punkt gemein haben können.</u>
Wäre dieses nämlich der Fall, so könn-
ten wir zu dem betr. Punkte zwei ver-
schiedene Bildgitter hinzuconstru-
iren, indem wir ihn mit den
Punkten der beiden Gitter mul-
tipliciren, welche mit den Gittern,
denen er selbst angehört, conju-
girt sind.

Der letzte Satz ist für die Auf-
fassung unserer Normalfigur na-
türlich von grosser Wichtigkeit.
Die Uebersichtlichkeit dieses an

sich etwas complicirten geometrischen Gebildes wird durch ihn erheblich gesteigert – oder vielmehr, sie würde völlig verloren gehen, wenn der Satz nicht bestünde.

Wir schreiten nun zu einer neuen Définition der Idealgitter, die wir als die Dedekind'sche bezeichnen, da sie von diesem herrührt.

Ausser den Idealgittern sind dem Hauptgitter viele andere Gitter eingelagert. Ein solches dem Hauptgitter eingelagertes Gitter nennt nun Dédekind ein Ideal, wenn es die folgende Eigenschaft besitzt:

Ein beliebiger Punkt des Gitters giebt, multiplicirt mit einem beliebigen Punkte des Hauptgitters, wieder einen Punkt des Gitters.

Hier bietet sich uns die Aufgabe, die Beziehungen zwischen unserer und der Dedekind'schen Définition aufzusuchen, eventuell die Identität beider Definitionen nachzuweisen. Die Untersuchung wird sich mit der

Beantwortung der folgenden beiden Fragen zu befassen haben:

1. <u>Ist ein Idealgitter in unserem Sinne stets ein Dedekind'sches Ideal?</u>

2. <u>Ist ein Dedekind'sches Ideal stets ein Idealgitter in unserem Sinne?</u>

Ad 1. Die Antwort auf die erste Frage ist leicht mit ja zu geben, wie sofort daraus folgt, daß unsere Idealgitter der Inbegriff der durch eine feste Zahl theilbaren Hauptzahlen sind. Greifen wir nämlich einen beliebigen Punkt des Idealgitters heraus, so ist dieser gleich dem Produkte von einer bestimmten Zahl ξ mit einer Zahl des zu dem Gitter von ξ conjugirten Gitters. Multipliciren wir dieses Product mit einer Hauptzahl, so ergiebt sich eine Zahl, welche nach unseren früheren Sätzen über Gittercomposition aufgefasst werden kann als Produkt derselben Zahl ξ mit einer gewissen Zahl desselben zu ξ conjugirten Gitters. Die-

ses Product kommt aber nach Definition unter den Punkten des Idealgitters vor.

Ad 2. Die zweite Frage müssen wir ebenfalls mit ja beantworten, wie wir jetzt nachweisen wollen.

Wählen wir einen Basispunkt des vorliegenden Gitters auf der u-Axe, was stets möglich ist, so können wir dasselbe schreiben:

$$G = ax + \left(m + n\frac{\sqrt{d}}{2}\right) y,$$

wobei wir uns der Einfachheit halber auf den Fall $d \equiv 0 \pmod 4$ beschränken. a, m, n bedeuten hier ganze rationale Zahlen.

Nach Voraussetzung soll nun G die Eigenschaft haben, daß, wenn man eine beliebige Zahl aus G mit einer beliebigen Hauptzahl multiplicirt, wieder eine Zahl aus G heraus kommt. Wir machen deshalb den Ansatz:

$$\left[ax + (m + n\frac{\sqrt{d}}{2}\, y)\right]\left[x' + \frac{\sqrt{d}}{2}\, y'\right] = ax'' + \left(m + n\frac{\sqrt{d}}{2}\right) y''$$

Hier müssen sich für alle ganzzahligen Werthe von x, y, x', y' auch ganzzahlige Werthe x'', y'' ergeben, d. h. die bilinearen Ausdrücke, welche x'' und y'' als Functionen von $x, y \mid x', y'$ darstellen, müssen ganzzahlige Coefficienten haben. Diese lauten aber:

$$x'' = xx' - \frac{m}{n} xy' - \frac{m^2 - n^2\frac{d}{4}}{an} yy'$$

$$y'' = \frac{a}{n} xy' + yx' + \frac{m}{n} yy'.$$

Aus der zweiten Zeile folgt, daß a und m durch n theilbar sein müssen, d. h. alle Zahlen des Gitters G sind durch die ganze rationale Zahl n theilbar; wir betrachten deshalb zunächst das einfachere Gitter:

$$\frac{G}{n} = \frac{a}{n} x + \left(\frac{m}{n} + \frac{\sqrt{d}}{2}\right) y,$$

das wir der Kürze halber wiederschreiben:

$$ax + \left(m + \frac{\sqrt{d}}{2}\right) y.$$

Die zugehörige Form lautet:

$$a^2x^2 + 2amxy + \left(m^2 - \frac{d}{4}\right) y^2.$$

Aus den Formeln 1., die für unseren jetzigen Fall Geltung haben, wenn wir $n = 1$ setzen, folgt nun, daß $m^2 - \frac{d}{4}$ durch a theilbar sein muß. Die zum Gitter gehörige Form können wir daher auch schreiben:

$$a\left(a x^2 + 2 m x y + \frac{m^2 - \frac{d}{4}}{a} y^2\right) = a(a x^2 - b x y + c y^2);$$

Die in Klammern stehende Form ist nun eine Stammform, weil sie die Discriminante d besitzt; wir können deshalb setzen:

$$a x + \left(m + \frac{\sqrt{d}}{2}\right) y = \varrho \sqrt{a} \cdot \frac{1}{\varrho}\left(\sqrt{a}\, x + \frac{-b + \sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\, y\right)$$

d.h. das Gitter $a x + \left(m + \frac{\sqrt{d}}{2}\right) y$ ist das Bildgitter der Gitterzahl $\varrho \sqrt{a}$ und daher das ursprüngliche Gitter G das Bildgitter der Gitterzahl $n \cdot \varrho \sqrt{a}$, womit die Richtigkeit unserer Behauptung dargethan ist.

Wir wollen jetzt noch eine Verallgemeinerung der gesammten Idealtheorie kurz besprechen, welche uns durch die Normalfigur nahe gelegt wird. Da wir in dieser im-

Haupt- und Nebengitter gleichzeitig und gleichberechtigt vor Augen haben, so werden wir es als eine Willkür bezeichnen, dass wir die Untersuchung der idealen Faktoren durchaus auf das Hauptgitter warfen. Es zeigt sich nämlich, dass wir das Hauptgitter ebensogut durch ein beliebiges, aber festes Nebengitter ersetzen können, welches wir sozusagen zum Bildträger für die den übrigen Punkten unserer Normal-Figur zuzuordnenden Bildgitter machen.

Wir verfahren folgendermassen: Sei G' das ausgezeichnete beliebige Gitter, welches wir zum Bildträger machen wollen, G dasjenige Gitter, in welchem der abzubildende Punkt liegt. Zunächst suchen wir das Gitter G'' auf, welches mit G componirt das Gitter G' ergiebt, so dass also

$$G \cdot G'' = G' \quad \text{ist.}$$

Um das Bildgitter der zu G gehörigen Gitterzahl

$$\varrho\left(\sqrt{a}\,x_0 + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y_0\right)$$

zu entwerfen, multiplicieren wir diese mit allen Gitterzahlen von G'', nämlich mit

$$\varrho''\left(\sqrt{a''}\,x + \frac{b''+\sqrt{d}}{2\sqrt{a''}}\,y\right).$$

Das so entstehende Gitter

$$\varrho\varrho''\left(\sqrt{a}\,x_0 + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y_0\right)\left(\sqrt{a''}\,x + \frac{b''+\sqrt{d}}{2\sqrt{a''}}\,y\right)$$

ist nach der Compositionstheorie dem Gitter G' eingelagert und liefert ein Bild des dem Gitter G angehörigen Punktes. Wir werden dieses Bildgitter ein <u>Nebengitterideal</u> nennen. Wir sagen also:

<u>Jedem Gitterpunkte unserer Normalfigur kann nicht nur im Hauptgitter ein Ideal entsprechend gesetzt werden, sondern auch in jedem fest verabredeten Nebengitter G!</u>

Diese neue Begriffsbildung wird

uns in der Theorie der singulären Moduln sehr nützlich sein, da sie der Gleichberechtigung der verschiedenen Wurzeln der Modulargleichung von vornherein Rechnung trägt.

Wollen wir das Nebengitterideal in Dedekind'scher Weise definiren, so constatiren wir zunächst die selbstverständliche Thatsache, dass die Zahlen desselben ein Gitter bilden, d. h. sich durch Addition und Subtraction reproduciren. Ferner aber: Multipliciren wir die Zahlen dieses Systems mit einer beliebigen Hauptzahl α, so ergeben sich Zahlen, welche demselben System angehören. In der That sind die Zahlen $G''\alpha$ wieder Zahlen des Gitters G'', daher gehören auch die Zahlen $\xi \cdot G''\alpha$ dem ursprünglichen, in G' gelegenen Bildgitter an.

Wiederum können wir den Satz umkehren, wo er dann lautet: <u>Befindet sich in einem festen</u>

<u>Gitter G' ein eingelagertes Gitter welches die Eigenschaft hat, dass seine Punkte, multiplicirt mit beliebigen Punkten des Hauptgitters, wieder ihm angehörige Punkte ergeben, so ist dieses eingelagerte Gitter ein zu dem Gitter G' gehöriges Nebengitterideal.</u>

Den Beweis führen wir auf den entsprechenden Satz für die Hauptgitterideale zurück. Ist

$$\xi_1 x + \xi_2 y$$

ein dem festen Gitter G' eingelagertes Gitter mit der vorausgesetzten Eigenschaft, und componiren wir dasselbe mit dem zu G' conjugirten Gitter $\bar{G}'$, so ergiebt sich offenbar ein dem Hauptgitter eingelagertes Gitter:

$$(\xi_1 x + \xi_2 y) \cdot \bar{G}' = \omega_1 x + \omega_2 y,$$

das ebenfalls die Eigenschaften eines Dedekind'schen Ideals besitzt. Entspricht ihm der ideale

Factor ξ aus dem Gitter $\mathfrak{G}$, so ist

$$\omega_1 x + \omega_2 y = \xi \cdot \bar{\mathfrak{G}},$$

wo $\bar{\mathfrak{G}}$ das zu $\mathfrak{G}$ conjugirte Gitter bedeutet. Aus den hingeschriebenen Gleichungen folgt nun:

$$\xi_1 x + \xi_2 y = \mathfrak{G}'(\omega_1 x + \omega_2 y) = \xi \mathfrak{G}' \bar{\mathfrak{G}} = \xi \cdot \mathfrak{G}'',$$

d. h. ξ ist auch der zu $\xi_1 x + \xi_2 y$ gehörige ideale Factor und daher $\xi_1 x + \xi_2 y$ ein Nebengitterideal in unserem Sinne.

Wir gehen jetzt auf das Entsprechen zwischen Idealen und idealen Factoren näher ein und beweisen diesbezüglich den folgenden grundlegenden Satz, der uns zeigt dass hinsichtlich der Theilbarkeit Ideal und idealer Factor völlig aequivalent sind:

<u>Sind alle Zahlen eines Idealgitters (mag es nun im Hauptgitter oder in einem festen Nebengitter liegen) durch eine ganze algebraische Zahl theilbar, so ist auch</u>

<u>der zugehörige ideale Factor durch dieselbe theilbar.</u>

Beweis: Bezeichnen wir das Ideal mit $\xi \cdot G$ und sind alle Zahlen desselben durch die ganze algebraische Zahl η theilbar, so sind alle Zahlen des Ideals $\xi^h G^h$ oder $\xi^h H$ durch η^h theilbar. Da nun in H die 1 enthalten ist, muss ξ^h durch η^h theilbar sein, oder $\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^h$ eine ganze algebraische Zahl. Ist aber $\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^h$ eine ganze algebraische Zahl, so ist es auch $\frac{\xi}{\eta}$. Denn genügt $\left(\frac{\xi}{\eta}\right)^h$ etwa der Gleichung

$$x^n + a_1 x^{n-1} + \dots a_{n-1} x + a_n = 0,$$

wo $a_1, \dots a_{n-1}, a_n$ ganze rationale Zahlen bedeuten, so genügt $\frac{\xi}{\eta}$ der Gleichung

$$x^{nh} + a_1 x^{(n-1)h} + \dots a_{n-1} x^h + a_n = 0,$$

ist also ebenfalls eine ganze algebraische Zahl.

Wir fügen dem vorstehenden Theorem noch den folgenden leicht

einzusetzenden Satz hinzu:

<u>Die Zahlen eines Stammgitters</u> (mag es nun das Haupt- oder ein Nebengitter sein) <u>besitzen in ihrer Gesammtheit keinen gemeinsamen Theiler.</u>

Besässen dieselben nämlich einen gemeinsamen Theiler, so müsste die zum Gitter gehörige Form offenbar imprimitiv sein, was bei einer Stammform nicht möglich ist.

Nach diesen Vorbereitungen kommen wir nun zu unserer Hauptaufgabe. Als solche haben wir pag. 180 bezeichnet: <u>Einen dem Euklidischen analogen Algorithmus zu finden, welcher zur Auffindung des grössten gemeinsamen Theilers zweier Gitterzahlen ξ und ξ' führt.</u> Die Gitterzahlen können dabei Haupt- oder Nebenzahlen sein, zu gleichen oder zu verschiedenen Gittern gehören.

Unser Verfahren, welches, wie wir sehen werden, dem Verfahren der gewöhnlichen Zahlentheorie

genau nachgebildet ist, soll in Folgendem bestehen. Wir bilden zu beiden Zahlen die zugehörigen Idealgitter:

$$\xi . G \text{ und } \xi' . G'$$

Wir fügen diese Gitter in der Weise zusammen, dass wir zu jeder Zahl des einen jede Zahl des anderen Gitters addiren, d. h. wir addiren die beiden Gitter. Die entstehende Summe ist wieder ein Gitter und zwar ein Idealgitter, weil es die Dedekind'schen Definitionsbedingungen befriedigt. Es muss daher zu ihm ein idealer Factor τ gehören, nach dessen Abspaltung noch das Stammgitter T übrig bleiben möge, so dass wir haben:

$$\xi . G + \xi' . G' = \tau . T$$

Wir behaupten nun, dass τ der gesuchte grösste gemeinsame Theiler von ξ und ξ' ist. Denn

erstens ist τ ein Theiler sowohl von ξ wie von ξ', weil alle Zahlen von $\xi . G$ und von $\xi' . G'$ durch τ theilbar sind, also nach Satz pag 198 auch ξ und ξ' selbst. Ferner sind aber auch $\frac{\xi}{\tau}$ und $\frac{\xi'}{\tau}$ relativ prim. Denn wir haben

$$\frac{\xi}{\tau} \cdot G + \frac{\xi'}{\tau} \cdot G' = T$$

Hätten nun $\frac{\xi}{\tau}$ und $\frac{\xi'}{\tau}$ noch einen gemeinsamen Theiler, so müssten auch sämmtliche Gitterzahlen des Stammgitters T durch ihn theilbar sein. Diese besitzen aber, wie wir soeben ausgeführt haben, keinen gemeinsamen Theiler. Daher gilt dasselbe auch für $\frac{\xi}{\tau}$ und $\frac{\xi'}{\tau}$, d. h. τ ist der grösste gemeinsame Theiler von ξ und ξ'.

Daher die folgende Regel: *Um den grössten gemeinschaftlichen Theiler zweier Gitterzahlen zu finden, addire man die zugehörigen Ideale und bestimme*

den zu dem entstehenden Ideal gehörigen idealen Factor.

Um zu zeigen, dass dieser Process dem der gewöhnlichen Zahlentheorie parallel geht, bestimmen wir etwa den grössten gemeinschaftlichen Divisor von 6 und 9. Wir können da so sagen: Wir bilden das zur Zahl 6 und das zur Zahl 9 gehörige Ideal. Dieses Ideal besteht natürlich aus der Gesammtheit der durch 6 bez. durch 9 theilbaren Zahlen der natürlichen Zahlenreihe. Durch Addition beider Ideale folgt das Zahlensystem

$$0,\ 3,\ 6,\ 9,\ \ldots,$$

welches wir auffassen können als das zur Zahl 3 gehörige Ideal. Diese Zahl 3 ist der gesuchte grösste gemeinsame Theiler von 6 und 9.

Nachdem wir im Vorstehenden die begriffliche Seite unseres Processes geschildert haben, wird es keine Schwierigkeit haben, densel-

ben in arithmetische Form zu setzen. Das Prinzip wird dabei folgendes sein: Zu jedem der beiden Ideale ξG und $\xi' G'$ gehören zwei Basiszahlen.

Durch passende Zusammenfügung der letzteren wird man die Basiszahlen des durch Summation entstehenden Ideales berechnen. Aus dem letzteren bestimmt sich aber leicht der zugehörige ideale Factor.

Wir erkennen nun auch deutlich den eigentlichen Grund, welcher zu der Einführung der Ideale in diese Betrachtung zwingt. Dieser besteht darin, daß man zur Uebertragung des Euklidischen Algorithmus die Addition der Gitterzahlen nöthig hat. Diese können wir aber bei zwei beliebigen Gitterzahlen, sofern dieselbe verschiedenen Gittern angehören, nicht ausführen, ohne aus unserer Normalfigur herauszutreten. Es ist nöthig, die Zahlen vorerst commensurabel zu machen, beispielsweise dadurch,

daß man ihnen je ein Zahlensystem des Hauptgitters zuordnet. Die so entstehenden Bilder kann man dann nach Belieben durch Addition combiniren.

Gleichzeitig bemerken wir nochmals, daß die Auszeichnung des Hauptgitters hierbei unwesentlich ist. Wir können die Bilder der Gitterzahlen ebensogut in einem beliebigen, aber festen anderen Gitter construiren, weil auch diese die Addition zulassen.

Wir möchten hier noch ausdrücklich der in den Büchern häufig ausgesprochenen Ansicht entgegentreten, wonach es im Gebiete der complexen algebraischen Zahlen keinen dem gewöhnlichen analogen Algorithmus des grössten gemeinsamen Theilers gebe. Diese Ansicht ist nur berechtigt, wenn man sich auf den speciellen Standpunkt stellen will, daß allein die Zahlen des Hauptgitters als Material gegeben sind. Dem-

gegenüber sahen wir, dass, bei gleichmässiger Berücksichtigung der Nebengitter, der elementare Process in passender Verallgemeinerung genau aufrecht erhalten werden kann.

Auf Grund unseres Processes können wir nun alle diejenigen Schlüsse, welche man an denselben in der gewöhnlichen Zahlentheorie knüpft, genau wiederholen und kommen dabei zu entsprechenden Resultaten.

Wir haben uns vor allen Dingen zu überlegen, dass überhaupt nothwendigerweise Primzahlen existiren. Der Grund ist, dass die Factorenzerlegung einer vorgelegten Gitterzahl, von der Abspaltung von Einheiten abgesehen, nicht in's Unendliche weiter gehen kann. Denn zu den Factoren müssen ganzzahlige Werthe von f gehören, welche den zur gegebenen Gitterzahl gehörigen ganzzahligen Werth von f theilen.

Ferner aber handelt es sich um den Satz, <u>daß eine beliebige Zahl sich auf eine und nur auf eine Weise in ein Produkt von Primzahlen zerlegen laße.</u>

Der Hauptpunkt beim Beweise desselben bildet, wie bekannt, schon in der gewöhnlichen Zahlentheorie das folgende Lemma:

<u>Wenn das Produkt zweier Zahlen durch eine Primzahl theilbar ist, so wird nothwendiger Weise eine der beiden Zahlen durch die Primzahl getheilt.</u>

Dieses Lemma wollen wir hier für unser Zahlengebiet in Kürze beweisen, während wir die übrigen Theile des Beweises überspringen können, da sie aus der gewöhnlichen Zahlentheorie unmittelbar herüber-genommen werden können.

Seien also α und β zwei Gitterzahlen, von denen bekannt ist, daß ihr Produkt $\alpha\beta$ durch eine Primzahl π theilbar ist. Wir

nehmen an, dass etwa α durch π nicht theilbar sei. Dann ist der grösste gemeinsame Theiler von α und π die Einheit. Bilden wir nun die zu α und π gehörigen Idealgitter, so erhalten wir durch Summation ein neues Ideal, welches zu dem Factor 1 gehört, also das ganze Hauptgitter ausmacht. In diesem muss insbesondere der Einheitspunkt (1, 1) selbst enthalten sein. Mithin haben wir die Gleichung:

$$\alpha A + \pi \Pi = 1,$$

unter A und Π geeignet gewählte Zahlen aus den zu α und π conjugirten Gittern verstanden. Diese Gleichung multipliciren wir beiderseits mit β. Es ist aber in der Gleichung

$$\alpha \beta A + \beta \pi \Pi = \beta$$

die linke Seite nach Voraussetzung durch π theilbar. Also ist es auch

die rechte. *Wir sehen also, daß von den beiden Zahlen α und β nothwendig eine durch π theilbar ist.*

Von hier aus folgt der Beweis des Fundamentalsatzes über die eindeutige Zerlegbarkeit eines jeden Gitterpunktes in Primpunkte in bekannter Weise von selbst.

Wir schliessen unsere Darstellung der für unser Zahlengebiet geltenden Theilbarkeitsverhältnisse damit, daß wir eine *Aufzählung sämtlicher in unserem Zahlgebiete vorhandenen Primzahlen vornehmen.*

1. Die Aufzählung wird durch den folgenden Satz erleichtert.

Man erhält alle Primpunkte unserer Figur, wenn man zusieht, in welche Factoren sich die auf der horizontalen Geraden des Hauptgitters gelegenen Punkte (p, p) zerlegen lassen, deren Coordinaten p Primzahlen im Sinne der gewöhnlichen Zahlentheorie sind.

In der That, sei $(\pi, \bar{\pi})$ ein belie-

biger Primpunkt, welcher mit seinem conjugirten $(\pi, \bar{\pi})$ multiplicirt den rationalen Punkt (m, m) ergiebt. Hier ist, wie wir behaupten, m eine gewöhnliche Primzahl p oder das Quadrat einer solchen. Denn

1. kann m nicht durch 2 verschiedene rationale Primzahlen p und q theilbar sein. Wäre nämlich:

$m = p \cdot q \cdot m'$, so hätten wir, da auch

$m = \pi \cdot \bar{\pi}$

unter allen Umständen zwei verschiedene Zerlegungen von m, mögen nun p, q und m' noch weiter zerlegbar sein oder nicht.

2. Es muss also m die Potenz einer gewöhnlichen Primzahl sein:

$$m = p^{\lambda}.$$

Hier kann nun λ höchstens gleich 2 sein, weil sonst offenbar m in mehr als 2 Primfactoren zerlegbar wäre, was der Gleichung $m = \pi \cdot \bar{\pi}$ widerspricht.

Hiermit ist die Richtigkeit des angegebenen Satzes dargethan, aber implicite auch schon eine Eintheilung der aufzuzählenden Primzahlen gegeben. Wir werden dieselben nämlich in 2 Categorieen eintheilen, je nachdem $\lambda = 1$ oder $\lambda = 2$ ist.

I $\lambda = 1$. Es ist $\pi \cdot \bar{\pi} = p$

Hier sind wieder noch 2 Fälle zu scheiden

a) π und $\bar{\pi}$ verschieden

b) $\pi = \bar{\pi}$ (natürlich bis auf Einheiten)

In beiden Fällen bleibt die gewöhnliche Primzahl p nicht mehr Primzahl in unserem Zahlsystem, sondern ist noch weiter in 2 Primfaktoren zerlegbar.

II) $\lambda = 2$, $\pi \cdot \bar{\pi} = p \cdot p$

Aus der Eindeutigkeit der Zerlegung folgt:

$$\pi = \bar{\pi} = p.$$

In diesem Falle ist die gewöhnliche Primzahl p auch Primzahl in unserem erweiterten Zahlsystem.

2. Wir fragen nun weiter, wann die Fälle I & II eintreten werden. Diesbezüglich haben wir den Doppelsatz:

<u>Der Fall I tritt ein, d. h. die gewöhnliche Primzahl p ist in das Product zweier conjugirter Primfactoren spaltbar, wenn p durch eine quadratische Form der Discriminante d darstellbar ist.</u>

<u>Der Fall II tritt ein, d. h. die gewöhnliche Primzahl p ist nicht weiter zerlegbar, wenn p nicht durch eine quadr. Form der Discr. d darstellbar ist.</u>

Der erste Theil dieses Satzes ist selbst verständlich, denn die Darstellung von p durch eine quadr. Form der Discriminante d giebt direct die beiden Primfactoren an, in die p zerlegbar ist.

Die Richtigkeit des zweiten Theiles ist leicht auf indirecte Weise zu schliessen. Angenommen p wäre nicht durch eine quadr. Form der Discriminante d

darstellbar und doch zerlegbar, etwa

$$p = \pi . \bar{\pi}\text{, so könnten wir setzen}$$

$$\pi = \rho\left(\sqrt{a}\,x_0 + \frac{b+\sqrt{d}}{2\sqrt{a}}\,y_0\right) \text{ und } \bar{\pi} = \frac{1}{\rho}\left(\sqrt{a}\,x_0 + \frac{b+\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}\,y_0\right).$$

Hieraus würde folgen:

$$p = a x_0^2 + b x_0 y_0 + c y_0^2 \text{ und } b^2 - 4ac = d,$$

d.h. p wäre doch durch eine quadratische Form der Discriminante d darstellbar, was der Voraussetzung widerspricht. Es kann deshalb p in dem angenommenen Falle nicht weiter zerlegbar sein.

3. Bevor wir auch die Fälle I a und I b trennen, fügen wir noch folgenden Satz ein:

<u>Lässt sich p durch eine Form der Discriminante d darstellen, so giebt es speciell auch eine solche Form, deren erster Coefficient p ist.</u>

Es sei

$$p = a x_0^2 + b x_0 y_0 + c y_0^2,$$

wo x_0, y_0 zwei ganze rationale

Zahlen bedeuten, die nothwendig theilerfremd sein müssen, da p Primzahl sein soll. Wir wenden nun auf die Form $ax^2+bxy+cy^2$ die Substitution:

$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha x' + \beta y' \\ y = \gamma x' + \delta y' \end{array}\right| \alpha\delta - \beta\gamma = 1$$

an.

Hierdurch entstehe die Form

$$a'x'^2 + b'x'y' + c'y'^2.$$

In unserer linearen Substitution können wir die Coefficienten α und γ willkürlich wählen mit der alleinigen Beschränkung, dafs sie keinen gemeinsamen Theiler haben dürfen. Wie aus dem Anfang dieser Vorlesung bekannt, lassen sich dann in der That stets corresponirende Werthe von β und δ bestimmen. Speciell wollen wir α und γ gleich x_0 und y_0 nehmen. Dann gehört zu dem Werthepaare $x'=1$, $y'=0$ das Werthepaar $x=x_0$,

$y = y_0$. Unsere Form (a', b', c') muss also für $x' = 1, y' = 0$ den Werth p liefern; wir haben mithin:

$a' = p$, was zu beweisen war.

4 Wir gehen jetzt dazu über, die Criterien für die Fälle I a und I b anzugeben:

I a. Die Primzahl p ist in das Produkt zweier verschiedener Primfaktoren zerlegbar, wenn p nicht in d aufgeht (und wenn, wie bereits angegeben wurde, p durch eine quadratische Form der Discriminante d darstellbar ist.)

I b. Die Primzahl p zerfällt in das Produkt zweier gleicher Primfaktoren $\sqrt{p} \cdot \sqrt{p}$, wenn p in d aufgeht.

Die Beweise für diese Angaben liegen in den folgenden Ausführungen.

Ist d durch p theilbar, so ist auch der zweite Coefficient der Form (p, b', c') durch p theilbar. Durch Reduktion kann man einen der beiden Fälle erreichen: $b' = 0$ oder

$b' = p$. In beiden Fällen ist die Form eine Ancepsform.

Sie lautet:

$$px^2 - \frac{d}{4p}y^2, \text{ beziehungsweise}$$

$$px^2 + pxy + \frac{p^2 - d}{4p}y^2.$$

Auf Grund unserer Orientirung der Ancepsgitter ergiebt sich die Zerlegung

$$p = \sqrt{p} \cdot \sqrt{p},$$

p erscheint also als das Quadrat einer sich selbst conjugirten Primzahl.

Geht p nicht in d auf, so ist auch der zweite Coefficient von (p, b', c') nicht durch p theilbar. Wir erhalten daher hier eine Zerlegung:

$$p = \varrho\sqrt{p} \cdot \frac{1}{\varrho} \cdot \sqrt{p}, \text{ wo } \varrho \text{ von } 1 \text{ und}$$

einer Einheit verschieden ist.

p erscheint also als das Produkt zweier ungleicher Primzahlen.

5. Wir wollen jetzt die vorstehenden Kriterien noch etwas vereinfachen, indem wir die Darstellbar-

keit von p durch eine quadratische Form der Discriminante d auf das Legendre'sche Symbol $\left(\frac{d}{p}\right)$ zurückführen.

Ist nämlich p durch eine quadratische Form der Discriminante d darstellbar, so giebt es eine quadratische Form mit dem ersten Coefficienten p:

$$p x^2 + b x y + c y^2, \text{ so dass}$$

$$b^2 - 4pc = d; \text{ also } b^2 \equiv d \pmod{4p}$$

ist.

Umgekehrt besteht die Congruenz $b^2 \equiv d \pmod{4p}$, so lässt sich stets p durch eine quadratische Form

$$p x^2 + b x y + \frac{b^2 - d}{4p} y^2$$

mit der Discriminante d darstellen.

Für das Folgende haben wir jetzt die Fälle $p = 2$ und p ungerade gesondert zu betrachten.

6. Wir untersuchen zunächst die Zerlegbarkeit von 2, betrachten also die Congruenz:

$$b^2 \equiv d \pmod 8$$

Von Hause aus hat die Discriminante d eine der Formen:

$$8\sigma,\ 8\sigma+1,\ 8\sigma+4,\ 8\sigma+5.$$

Hiervon erledigen sich die Fälle $d=8\sigma$ und $d=8\sigma+4$ sofort; beidemale ist nämlich d durch 2 theilbar; infolgedessen zerfällt 2 in die Primfactoren $\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$.

Ist $d=8\sigma+1$, so ist die Congruenz $b^2\equiv d \pmod 8$ lösbar, daher 2 durch eine quadratische Form der Discriminante d darstellbar und folglich in zwei verschiedene Primfactoren zerlegbar.

Ist $d=8\sigma+5$, so ist die obige Congruenz nicht lösbar, daher auch 2 nicht durch eine Form der Discriminante d darstellbar und infolgedessen unzerlegbar. Zusammenfassend haben wir:

$d\equiv 0 \pmod 4) \ldots 2=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}$

$d=8\sigma+1 \ldots\ldots$ 2 zerfällt in das Produkt zweier verschiedener Primfactoren

$d=8\sigma+5 \qquad$ 2 ist unzerlegbar.

7. Wir betrachten jetzt den Fall, dass p eine ungerade Primzahl ist. In diesem Falle zieht die Lösbarkeit der Congruenz $b^2 \equiv d \pmod{p}$ diejenige der Congruenz $b^2 \equiv d \pmod{4p}$ stets nach sich. Wir können daher sofort das folgende Resultat hineinschreiben:

$\left(\frac{d}{p}\right) = +1$; p zerfällt in das Produkt zweier verschied. Primfactoren

$\left(\frac{d}{p}\right) = 0$; p " " " " " gleicher " $\sqrt{p}\sqrt{p}$.

$\left(\frac{d}{p}\right) = -1$; p ist unzerlegbar, also selbst Primzahl.

8. Wir wollen endlich bei einer beliebigen Zahl

$$n = p^{\kappa} q^{\lambda} \ldots$$

fragen <u>auf wieviel Arten dieselbe als Produkt zweier conjugirter Zahlen ν und $\bar{\nu}$ unseres Gebietes aufgefasst werden kann.</u> Zu dem Zwecke zerlegen wir $p, q \ldots$ sofern es angeht und ordnen die einzelnen Factoren $\pi, \bar{\pi}$ auf alle Weisen zu conjugirten Produkten. Dies

ist eine rein combinatorische Aufgabe.

Bemerken wir noch, dass diese Frage übereinstimmt mit der Frage nach der <u>Anzahl der Darstellungen, welche die Zahl n durch Formen unserer Discriminante zulässt</u>. In der That giebt jede solche Darstellung eine Zerlegung der Zahl n und umgekehrt.

Geometrisch bedeutet diese Anzahl die Zahl derjenigen Gitterpunkte, welche in der Normalfigur die Entfernung $\sqrt{n}$ von O haben. Aus der vorstehenden Regel zur Berechnung jener Zahl ersehen wir, dass sie bei einer grösseren Anzahl in n vorkommender Factoren sehr erheblich sein kann. Es giebt dann eine grosse Menge von Punkten, welche von O dieselbe Entfernung $\sqrt{n}$ haben. Aber alle diese Punkte sind in unserer Normalfigur verschieden, weil sie sich eben aus verschiedenen Primpunkten aufbauen.

9. VII. 96. Hiermit schliessen wir unsere Behandlung der Compositionstheorie ab. Wir sollten dieselbe eigentlich noch weiter führen, indem wir sie von den <u>Stammgittern</u> (Discriminante d), auf <u>beliebige Zweiggitter</u> (Discriminante $D = n^2 d$) ausdehnen. Diese Verallgemeinerung bietet keine principiellen Schwierigkeiten, muss aber hier der Kürze halber übergangen werden. Trotzdem werden wir die bisherigen Resultate gelegentlich auch für Zweiggitter in Anspruch nehmen.

III. Haupttheil.

Theorie der singulären ellipstischen Gebilde.

Wir legen eine ganzzahlige negative Discriminante zu Grunde und betrachten die zu dieser Discriminante gehörige Normalfigur, bestehend aus h Gittern in bestimmter Orientirung. Die hierdurch definirten Gitterzahlen sind gewöhnliche complexe Zahlen von der Form $u \pm i \cdot v$. Die Discriminante wollen wir bezeichnen mit $D = -\nabla$, (indem wir uns das Zeichen Δ für die Discriminante der elliptischen Functionen vorbehalten).

Zu jedem dieser Gitter gehört ein gewisses elliptisches Gebilde. Dasselbe heisst singulär, weil die aus den Perioden ω_1, ω_2 (den Basiszahlen unseres Gitters) gebildete quadratische Form

$f = (\omega_1 x + \omega_2 y)(\overline{\omega}_1 x + \overline{\omega}_2 y) = ax^2 + bxy + cy^2$
eine ganzzahlige Form ist.

Wir studiren die Besonderheiten dieser singulären Gebilde. Dieselben bestehen allgemein zu reden darin, daß die Compositionstheorie auf sie Anwendung findet.

Speziell erinnern wir an den Schering'schen Satz (vergl. pg. 145) wonach jedes unserer h Gitter (bez. elliptischer Gebilde) durch eine Anzahl erzeugender Gitter (Gebilde) dargestellt werden kann in der Form

$$G = \Gamma^{\alpha} \Gamma^{\alpha_1} \cdots$$

Um an diese bestimmte Art der Darstellung zu erinnern, schreiben wir statt G: G_α (oder auch eventl. $G^{(\alpha)}$). Die Thatsache der Gittercomposition drückt sich dann einfach durch die Formel aus

$$G_\alpha \cdot G_{\alpha'} = G_{\alpha + \alpha'}.$$

Unter den Invarianten unserer elliptischen Gebilde werden wir dabei

nach den früheren Entwickelungen die folgenden berücksichtigen, die wir nach der Stufenzahl bez. nach ihrem Grade in den Variabeln ω_1, ω_2 noch einmal tabellarisch zusammenstellen:

	Modulfunctionen (Grad = 0)	Modulformen (Grad ≠ 0)
1. Stufe	$j = 1728\,J.$	g_2, g_3, $\sqrt[12]{\Delta}$ Grad −4, −6, −1
5. Stufe	ζ	ζ_1, ζ_2 Grad +1.

"Wir unterwerfen nun unsere Gebilde beliebigen Transformationen höherer Ordnung, suchen also zu den gegebenen Punktgittern neue auf, welche in jene eingelagert sind. Nun kennen wir für jedes unserer k Gitter eine besondere Kategorie von eingelagerten Gittern, nämlich die Idealgitter.

Die Besonderheit, welche unsere

singulären Gebilde gegenüber Transformationen höherer Ordnung darbieten, werden darin bestehen, daß unter den transformirten Gebilden diejenigen vorhanden sind, welche den Idealgittern entsprechen.

Aus dieser Bemerkung fliessen in der That höchst bemerkenswerthe Consequenzen bezüglich der soeben genannten Invarianten. Wir behandeln zunächst die Invarianten der 1ten Stufe und unterwerfen dieselben einer Transformation vom Primzahlgrade p (wobei wir $p > 2$ voraussetzen mögen).

Wir müssen unterscheiden, ob die Zahl p in unserer Normalfigur unzerlegbar ist, ob sie in das Produkt zweier gleicher oder zweier verschiedener Factoren zerfällt. Ueber den ersten Fall ist nichts Besonderes zu bemerken, weil sich hier die Transformationstheorie der singulären Gebilde ebenso gestaltet wie die der

nichtsingulären. Der zweite Fall tritt nur bei denjenigen Primzahlen auf, welche Theiler der Discriminante D' sind, und soll zunächst zurückgeschoben werden.
Wir setzen demnach voraus, daß der dritte Fall vorliegt, daß wir also haben

$$p = \pi . \bar{\pi}$$

wo π und $\bar{\pi}$ zwei verschiedene Primzahlen sind, welche bez. zu den Gittern G_β und $G_{-\beta}$ gehören mögen.

Es handle sich um die Transformation des elliptischen Gebildes G_α, welches nach Belieben als zu dem Hauptgitter oder zu einem Nebengitter gehörig vorausgesetzt werden möge. Wir kennen von vornherein zwei dem Gitter G_α eingelagerte Gitter, nämlich die beiden (Haupt- oder Neben-) Idealgitter

$$\pi . G_{\alpha-\beta}\,, \qquad \bar{\pi} . G_{\alpha+\beta} .$$

In der That gehören alle Ecken

dieser beiden Gitter nach der Compositionstheorie dem Gitter G_α an. Wir haben nämlich:

$$G_\beta \cdot G_{\alpha-\beta} = G_\alpha \quad \text{bez.} \quad G_\beta \cdot G_{\alpha+\beta} = G_\alpha .$$

Die Perioden der durch unsere Idealgitter definirten elliptischen Gebilde sind ersichtlich, wenn wir mit $\omega_1^{(\alpha-\beta)}$, $\omega_2^{(\alpha-\beta)}$ etc. die Perioden von $G^{(\alpha-\beta)}$ etc. bezeichnen, die folgenden:

$$\begin{cases} \pi \cdot \omega_1^{(\alpha-\beta)} \\ \pi \cdot \omega_2^{(\alpha-\beta)}, \end{cases} \qquad \begin{cases} \bar{\pi} \cdot \omega_1^{(\alpha+\beta)} \\ \bar{\pi} \cdot \omega_2^{(\alpha+\beta)} . \end{cases}$$

<u>Diese Perioden entstehen also aus den Perioden von $G_{\alpha-\beta}$ und $G_{\alpha+\beta}$ durch Multiplication mit der complexen Grösse π oder $\bar{\pi}$, oder wie man kurz sagt, durch „complexe Multiplication."</u>

Beiläufig bemerken wir, dass die zu unsern beiden Idealgittern gehörige quadratische Form die folgende ist:

$$f = \pi\bar{\pi}(\omega_1^{(\alpha\mp\beta)}x + \omega_2^{(\alpha\mp\beta)}y)(\bar{\omega}_1^{(\alpha\mp\beta)}x + \omega_2^{(\alpha\mp\beta)}y).$$

Sie entsteht also aus der zu $G_{\alpha+\beta}$ gehörigen Form durch Multiplication mit p; sie ist imprimitiv und hat die Discriminante $p^2 D$.

Hinsichtlich des Elementarparallelogramms der Idealgitter folgt hieraus: Dieses ist gleich $p\sqrt{-D}$, also p-mal so gross wie das Elementarparallelogramm eines der gegebenen h Gitter.

In Folge dessen entstehen unsere Idealgitter aus dem Gitter G_α durch Transformation p^{ter} Ordnung. Nun wissen wir von früher her (vergl. pg 29), dass allgemein aus einem beliebigen Gitter durch Transformation p^{ter} Ordnung $p+1$ neue grossmaschige Gitter entstehen, die dem gegebenen Gitter eingelagert sind.

Von diesen $p+1$ Gittern sind in unserem Falle zwei von vornherein bekannt, nämlich unsere Idealgitter.

Wir haben damit den centralen

Satz in der Theorie der singulären elliptischen Gebilde bezeichnet. Sehen wir zu, welche algebraischen Folgerungen sich daraus ergeben.

Wir betrachten zunächst die Transformationsgleichung für die Invariante j:

$$F(j', j) = 0$$

und verstehen unter j die zum Gitter G_α gehörige Invariante, die wir j_α nennen. Die Invarianten der $p+1$ transformirten Gitter j' werden durch die Wurzeln unserer Gleichung bestimmt. Denken wir uns nun die Invarianten $j_1 \dots j_\alpha$ gegeben, welche zu den ursprünglichen Gittern unserer Normalfigur gehören, so sind von den $p+1$ Wurzeln der Transformationsgleichung zwei bekannt, nämlich die Invarianten der Idealgitter. Da j nur von dem Periodenquotienten $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ abhängt und da die Perioden der Idealgitter aus denen von $G_{\alpha-\beta}$

und $G_{\alpha+\beta}$ durch complexe Multiplication hervorgehen, so sind die Invarianten der Idealgitter mit den Invarianten $J_{\alpha-\beta}$ und $J_{\alpha+\beta}$ identisch. Es sind also in der That von den $p+1$ Wurzeln zwei bekannt, nämlich

$$J' = J_{\alpha-\beta} \text{ und } J' = J_{\alpha+\beta}.$$

Der soeben abgeleitete Satz lässt eine wichtige Verschärfung zu, nämlich:

<u>Die übrigen $p-1$ Wurzeln der Transformationsgleichung sind von den singulären $J_1, J_2, \ldots J_k$ verschieden.</u>

Der Beweis für diese Behauptung ist sehr einfach. Soll $J' = J_k$ sein, so muss das zu J' gehörige Gitter G' dem zu J_k gehörigen Stammgitter ähnlich sein, also

$$G' = \mu_{\alpha-k} \cdot G_k$$

Um die Natur der Zahl $\mu_{\alpha-k}$ zu erkennen, komponire ich beiderseits mit G_{-k}, so dass sich ergiebt:

$$G' \cdot G_{-k} = \mu_{\alpha-k}\, H.$$

Da nun H die 1 enthält, muss $\mu_{\alpha-k}$ in dem Gitter $G'G_{-k}$ vorkommen und auch, da G' in G_α enthalten ist, in dem Gitter $G_\alpha \cdot G_{-k} = G_{\alpha-k}$. Es ist also $\mu_{\alpha-k}$ eine Gitterzahl des Gitters $G_{\alpha-k}$. Hieraus folgt, dass G' ein dem Gitter G_α eingelagertes Idealgitter ist. Nun ergiebt sich aus der Eindeutigkeit der Factorenzerlegung von p, dass es nur zwei in G_α durch Transformation p^{ter} Ordnung eingelagerte Idealgitter giebt, nämlich

$$\pi \cdot G_{\alpha-\beta} \text{ und } \pi \cdot G_{\alpha+\beta}.$$

Mit einem von diesen muss also G' nothwendig identisch sein, d. h. es ist $J_\varkappa$ entweder gleich $J_{\alpha-\beta}$ oder gleich $J_{\alpha+\beta}$, wie wir behauptet haben.

Nehmen wir ferner die Multiplicatorgleichung:

$$\Phi(M, J) = 0.$$

Diese ist in M vom $(p+1)^{ten}$

Grade; ihre Coefficienten sind nach Adjunction der Grössen $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ (vergl. pg) rational. Ihre Wurzeln bestimmen zu dem Gitter G_α die Multiplicatoren der zugehörigen $p+1$ transformirten Gitter. Denken wir uns die Werthe der Discriminante Δ, welche zu den ursprünglichen h Gittern gehören, gegeben, so sind wiederum zwei von den $p+1$ Wurzeln der Multiplicatorgleichung bekannt, nämlich die Multiplicatoren der Idealgitter. In der That werden die Discriminanten der Idealgitter

$$\Delta' = \Delta(\pi . \omega_1^{(\alpha-\beta)}, \pi\,\omega_2^{(\alpha-\beta)}) = \left(\frac{1}{\pi}\right)^{12} \Delta^{(\alpha-\beta)}$$

bezw.

$$\Delta' = \Delta(\bar{\pi}\,\omega_1^{(\alpha+\beta)}, \bar{\pi}\,\omega_2^{(\alpha+\beta)}) = \left(\frac{1}{\bar{\pi}}\right)^{12} \Delta^{(\alpha+\beta)},$$

mithin die zugehörigen Multiplicatoren:

$$M = \pi \sqrt[12]{\frac{\Delta^{(\alpha-\beta)}}{\Delta^{(\alpha)}}} \quad \text{bez.} \quad M = \pi \sqrt[12]{\frac{\Delta^{(\alpha+\beta)}}{\Delta^{(\alpha)}}}.$$

Diese von vornherein bekannten Grössen müssen sich unter den Wurzeln der Multiplicatorgleichung vorfinden. Allerdings bleibt hierbei noch unbestimmt und muss durch besondere Betrachtungen festgestellt werden, welcher von den zwölf Werthen von M, die in den vorstehenden Ausdrücken enthalten sind, der Multiplicatorgleichung genügt. Hierüber entscheiden die von Hurwitz gegebenen Entwickelungen.

10. VII. 96. Die vorhergehenden allgemeinen Resultate sollen nun specialisirt werden.

Wir halten zunächst daran fest, dass p in zwei verschiedene Primfactoren π und $\bar{\pi}$ zerfällt, setzen aber voraus, dass diese in ein und demselben Gitter, d. i. in einem Ancepsgitter liegen. Dann ist also $G_{\beta} = G_{-\beta}$ und $G_{\alpha-\beta} = G_{\alpha+\beta}$. Die beiden ausgezeichneten Wurzeln der Transformationsgleichung werden in diesem Falle iden-

tisch; es ist $J_{\alpha-\beta} = J_{\alpha+\beta}$. Unsere Gleichung $F(J, J_\mu) = 0$ erhält also eine Doppelwurzel, falls die beiden Factoren von p einem Ancepsgitter angehören.

Was die Multiplicatorgleichung betrifft, so wird hier $\Delta_{\alpha+\beta} = \Delta_{\alpha-\beta}$. Die beiden ausgezeichneten Wurzeln der Multiplicatorgleichung werden also in dem vorausgesetzten Specialfalle:

$$M = \pi \sqrt[12]{\frac{\Delta_{\alpha\pm\beta}}{\Delta_\alpha}} \text{ bez. } M = \bar{\pi} \sqrt[12]{\frac{\Delta_{\alpha\pm\beta}}{\Delta_\alpha}}.$$

Wir wollen eine weitere vereinfachende Annahme hinzufügen. Die beiden (verschiedenen) Factoren π und $\bar{\pi}$ sollen nicht einem Ancepsgitter schlechtweg, sondern speciell dem Hauptgitter angehören. Die Transformationsgleichung besitzt dann wie vorher eine Doppelwurzel; diese Doppelwurzel ist aber speciell gleich der Invariante des ursprünglichen Gitters

G_α.

Wir haben

$$J' = J_{\alpha-\beta} = J_{\alpha+\beta} = J_\alpha .$$

Gleichzeitig werden die beiden ausgezeichneten Wurzeln der Multiplicatorgleichung direct gleich

$$\pi \qquad \text{und} \qquad \bar{\pi}$$

(ev. bis auf hinzutretende 12te Einheitswurzeln).

Nachdem wir so den allgemeinen Fall behandelt haben, wo p in das Product zweier ungleicher Primfactoren zerfällt, mögen wir noch ein paar Worte über den besonderen Fall sagen, wo p gleich dem Quadrate eines sich selbst conjugirten Primfactors

$$p = \pi^2$$

wird. Jetzt giebt es unter den durch Transformation p^{ter} Ordnung aus G_α entstehenden Gittern nur ein Idealgitter. Daher ist von den

$p+1$ Wurzeln der Transformations-gleichung <u>nur eine</u> bekannt, nämlich

$$J' = J\alpha \pm \beta;$$

ebenso ist von den $p+1$ Werten des Multiplicators <u>nur einer</u> von vornherein angebbar, nämlich

$$M = \pi \sqrt{\frac{\Delta_{\alpha \pm \beta}}{\Delta_\alpha}}$$

Das Gitter G_β, welchem die Zahl π angehört, ist in diesem Falle (vergl. pg. 216) eo ipso ein Anceps-gitter. Setzen wir dieses noch speciell als das Hauptgitter voraus, so ergeben sich ähnliche Vereinfachungen wie oben.

Hieran schliesst sich leicht die Verallgemeinerung auf einen beliebigen Transformationsgrad. Sei der Transformationsgrad etwa

$$n = p^a \, q^b \ldots$$

Wir zerlegen die Zahl n in ihre Primfactoren π, $\bar{\pi}$, k, $\bar{k}$ etc. und

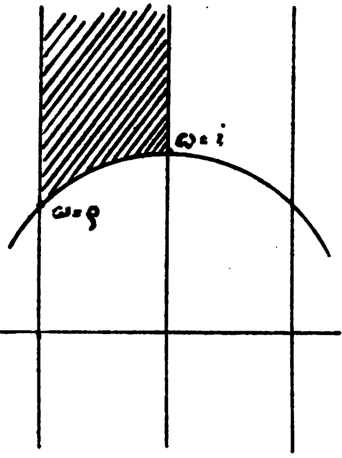
fassen diese auf alle Weisen in das Product zweier conjugirter Zahlen $n = r . \bar{r}$ zusammen, je der Factor r von n bestimmt nun ein Idealgitter, welches dem Gitter G_α durch Transformation n^{ter} Ordnung einge lagert ist. Dementsprechend erhält die Transformationsgleichung bez. die Multiplicatorgleichung ebenso viele bekannte Wurzeln, als es unterschiedene Factoren von n giebt. Gehört etwa r zum Gitter G_β, so sind dieses die Wurzeln

$$J' = J_{\alpha+\beta} \quad \text{bez.} \quad M = r \sqrt[n]{\frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_\alpha}}$$

Die Fruchtbarkeit dieser allgemeinen Sätze möge zunächst an einem speciellen Beispiele dargethan werden.

Unter allen Discriminantenwerthen sind die einfachsten $d = -3$ und $d = -4$.

Sie sind dadurch ausgezeichnet, dass sie nur eine Klasse liefern. In unserer Dreiecksfigur entsprechen diesen Werthen die Eckpunkte $\omega = \varrho$ und $\omega = i$. [Es liegt nahe, auch die dritte Ecke des Fundamentaldreiecks heranzuziehen. Diese liegt allerdings auf der Begrenzung der ω-Halbebene und entspricht daher einer zerfallenden Form von der Discriminante $d = 0$. Von den beiden



Perioden ω_1 und ω_2 wird dann die eine unendlich gross. In Folge dessen artet unser parallelogrammatisches Gitter in ein blosses Streifensystem aus. Wir kämen so von dem Fundamentalbereich der doppeltperiodischen Functionen zu dem der Exponentialfunction

und von der Theorie der singulären Moduln zu der Kreistheilungstheorie.

Es wäre ausserordentlich interessant, die Theorie der Kreistheilungsgleichungen unter diesem Gesichtspunkte als Grenzfall der Gleichungen der Transformationstheorie zu behandeln.)

Hier beschränken wir uns auf den Fall $d = -3$. In diesem Falle ist $g_2 = 0$ und daher auch $j = 0$. Wir untersuchen also die Transformation desjenigen speciellen elliptischen Gebildes, für welches $J\alpha = 0$ ist. Es giebt für $d = -3$ nur dieses eine elliptische Gebilde; h ist also $= \underline{1}$.

Das besondere Interesse dieses Gebildes liegt in der relativ grossen Anzahl der Einheiten. Für $d = -3$ giebt es die folgenden sechs Einheiten

$$\pm 1, \pm \varrho, \pm \varrho^2,$$

wo

$$\rho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}\,, \quad \rho^2 = \frac{-1-\sqrt{-3}}{2}$$

ist. Die Existenz der Einheiten kommt darin zum Ausdrucke, daß das Gitter ein gleichseitiges ist, daß es also bei einer Drehung um 60° mit sich zur Deckung kommt.

Wir haben nun die diesem Gitter eingelagerten Gitter zu betrachten. Die letzteren zerfallen in zwei Kategorien, je nachdem sie selbst bei einer Drehung um 60° mit sich zur Deckung kommen, oder nicht. Im ersten Falle sind sie ihrerseits gleichseitige Gitter, also dem ursprünglichen ähnlich. Nun entstehen aber die dem ursprünglich ähnlichen Gitter aus jenem durch gleichzeitige Multiplication der Perioden mit einer Gitterzahl. Diese Gitter sind daher keine anderen als unsere Idealgitter. Was die andere

Kategorie der eingelagerten Gitter betrifft, so muss es zu jedem von ihnen zwei andere Gitter geben, in welche dasselbe successive bei der Drehung um 60° übergeführt wird. Die Gitter der zweiten Kategorie gehören also zu dreien zusammen und gehen bei den Automorphien des Ausgangsgitters cyklisch in einander über.

Hiernach können wir sofort ein eigentümliches Verhalten der Transformationsgleichung vorhersehen. Setzen wir nämlich in $F(j';j)=0$ die Invariante j gleich Null, so werden sich je nach der Zerlegbarkeit der Zahl p im Körper $\sqrt{-3}$ keine, eine oder zwei Wurzeln $j'=0$ abspalten. Die übrigen Wurzeln aber müssen zu dreien einander gleich werden. Nur die erstere Thatsache gehört eigentlich in die Theorie der complexen Multiplication; die

letztere folgt ihrerseits aus der Existenz der Einheiten. Unser Resultat folgt übrigens auch aus der Gestalt des zum Transformationsgrade p gehörigen Fundamentalpolygons; vergl. oben pg.?

Wir behandeln der Reihe nach die Primzahlen

$$p = 2, \ 3, \ 5, \ 7, \ 11, \ 13.$$

Von diesen ist (nach pag. 219) 2, 5 und 11 unzerlegbar; die Zahl 3 geht in der Discriminante auf und wird daher gleich dem Quadrat eines Primfactors, multiplicirt mit einer Einheit:

$$3 = -(\varrho - \varrho^2)^2.$$

Die Zahlen 7 und 13 sind zerlegbar; u. zw. bekommen wir aus einer Zerlegung noch zwei andere (im Wesentlichen allerdings identische) Zerlegungen durch Multiplication mit den (nicht trivialen) Einheiten ϱ und ϱ^2. So ergiebt sich:

$$7=(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3})=\frac{1-3\sqrt{-3}}{2}\cdot\frac{1+3\sqrt{-3}}{2}=\frac{5+\sqrt{-3}}{2}\cdot\frac{5-\sqrt{-3}}{2}$$

und

$$13=(1+2\sqrt{-3})(1-2\sqrt{-3})=\frac{7+\sqrt{-3}}{2}\cdot\frac{7-\sqrt{-3}}{2}=\frac{5+3\sqrt{-3}}{2}\cdot\frac{5-3\sqrt{-3}}{2}$$

(Dass wir die beiden Factoren immer noch simultan im Vorzeichen ändern können, entspricht der „trivialen" Einheit -1.)

Um die zugehörigen Transformationsgleichungen aufzustellen, benutzen wir am besten ein Verfahren, welches in Math. Ann. Bd. 14 pg. 143 angegeben ist. Schliessen wir den Fall $n=11$ aus, der uns wegen der Unzerlegbarkeit der Zahl 11 ohnehin nicht interessirt, so wird in allen übrigen Fällen die Transformationsgleichung vom Geschlechte Null, wie man aus der Betrachtung der Transformationspolygone in der ω-Ebene folgern kann. Alsdann können wir J und J' als rationale Functionen eines geeigneten Parameters τ bestimmen, der auf dem Polygon jeden Werth nur einmal annimmt;

oder auch, wir können J als rationale Function von τ, J' als rationale Function eines zweiten Parameters τ' bestimmen und zwischen τ und τ' eine lineare Abhängigkeit festsetzen. An der genannten Stelle wird nun gemacht:

$$\left.\begin{array}{l} J : J-1 : 1 = \varphi(\tau) : \chi(\tau) : \psi(\tau) \\ J' : J'-1 : 1 = \varphi(\tau') : \chi(\tau') : \psi(\tau') \end{array}\right\} \tau\tau' = \text{const.}$$

Hier sind φ, χ, ψ rationale Functionen $(p+1)^{\text{ten}}$ Grades. Die vorstehenden Gleichungen vertreten mit Vortheil die Transformationsgleichung $F(j', j) = 0$, (sobald wir noch für J $\frac{j}{1728}$ einsetzen.)

Im Falle der Discriminante $d = -3$ wird nun noch, wie erwähnt, $j = 0$. Dies giebt zur Bestimmung von τ die Gleichung $\varphi(\tau) = 0$. Der correspondirende Werth von τ' folgt dann aus $\tau\tau' = \text{const}$ und der Werth der

transformirten Invariante j' aus der Gleichung $F' = \frac{\varphi(\tau')}{\psi(\tau')}$.

Im Folgenden stellen wir die Gleichung $\varphi(\tau) = 0$ für die Transformationsgrade 2, 3, 5 etc. zusammen und geben gleichzeitig den Zusammenhang der Grösse τ mit dem Multiplicator, wie es ebenfalls in Bd. XIV aufgestellt wurde.

<u>$n = 2$.</u> Die Gleichung für τ lautet:

$$(4\tau - 1)^3 = 0.$$

Da 2 unzerlegbar, kommt die Idealtheorie bei dieser Transformation nicht weiter zur Geltung. Wohl aber sehen wir, dass die drei transformirten Gitter unter einander congruent werden. Der Uebergang zu τ' wird vermittelt durch

$$\tau\tau' = 1,$$

der Uebergang zu M durch

$$\tau = -\frac{1}{64} M^{12}.$$

<u>$n = 3$.</u> In diesem Falle geht der Transformationsgrad in der Discriminante auf; es spaltet sich

daher eine Wurzel der Gleichung $\varphi(\tau)=0$ ab; die drei übrigen werden einander gleich. Wir haben in der That

$$\varphi(\tau)=(\tau-1)(g\tau-1)^3=0,\quad \tau\tau'=\underline{1}.$$

Aus der Wurzel $\tau=1$ ergiebt sich $\tau'=1$ und $\varphi(\tau')=0$ d.h. $j'=0$. Dieses besondere transformirte Gitter ist also dem ursprünglichen ähnlich. Zwischen τ und M besteht die Gleichung $\tau=\frac{M^6}{27}$; zur Wurzel $\tau=1$ gehört also der Multiplicator $M^6=27$. Nach der allgemeinen Theorie (vergl. pg. 235) wird der Multiplicator in unserem Falle bis auf eine zwölfte Einheitswurzel gleich dem Primfactor von 3, d.h. gleich $\sqrt{-3}$. Hiermit stimmt der soeben angegebene Werth $M^6=27$.

$\underline{n=5.}$ Da 6 unzerlegbar, ist über diesen Fall um wenig zu bemerken. Die Gleichung 6ten Grades $\varphi(\tau)=0$ muss zweimal drei gleiche Wurzeln haben. Sie lautet:

$$(\tau^2 - 10\tau + 5)^3 = 0,$$

ferner wird

$$\tau\tau' = 125, \quad \tau = -\mathfrak{M}^3.$$

<u>$n = 7$.</u> Da 7 unzerlegbar ist und zwar in zwei ungleiche Primfactoren, giebt es zwei singuläre Wurzeln der Gleichung $\varphi(\tau) = 0$ und im Übrigen zweimal drei gleiche. Unsere Gleichung lautet in der That

$$(t^2 + 13\tau + 49)(\tau^2 + 5\tau + 1)^3 = 0$$

mit

$$\tau\tau' = 49 \text{ und } \tau = \mathfrak{M}^2.$$

Die beiden singulären Werthe von τ, welche die complexe Multiplication vorhersagt, sind die folgenden

$$\tau^2 + 13\tau + 49 = 0$$

also

$$\tau = -\frac{13 \pm \sqrt{-27}}{2},$$

die zugehörigen Werthe von τ' lauten dann offenbar

$$\tau' = -\frac{13 \mp \sqrt{-27}}{2}.$$

Wir haben daher, wie es sein muß, $\varphi(\tau') = 0$ und $j' = 0$.

Von dem Werthe des Multiplicators wissen wir aus der allgemeinen Theorie, daß er gleich einem der Primfactoren π der Zahl 7 sein muss, d. h. gleich einer der 6 Zahlen

$$2 \pm \sqrt{-3}\ , \quad \frac{-1 \pm 3\sqrt{-3}}{2}\ , \quad \frac{5 \pm \sqrt{-3}}{2}\ .$$

In der That haben wir nach den vorstehenden Angaben

$$\tau = \left(\frac{1 \pm 3\sqrt{-3}}{2}\right)^2 = M^2.$$

$n = 11.$ Auf den Fall $n = 11$ findet weder die allgemeine Theorie der complexen Multiplication noch der besondere rechnerische Ansatz Anwendung.

$n = 13.$ Wieder giebt es zwei singuläre Wurzeln in der Gleichung

$$\varphi(\tau) = (\tau^2 + 5\tau + 13)(\tau^4 + 7\tau^3 + 20\tau^2 + 19\tau + 1)^3 = 0.$$

Es sind dieses die Werthe

$$\tau = \frac{-5 \pm \sqrt{-27}}{2}$$

Ferner haben wir

$$\tau \tau' = 13, \quad \tau = M.$$

Hieraus ergiebt sich:

$$\tau' = \frac{-5 \mp \sqrt{-27}}{2}$$

und $\varphi(\tau') = 0$, wie es sein muss. Auch die Werthe des Multiplicators stimmen mit der allgemeinen Theorie, da sie gleich geeigneten Primtheilern von 13 werden:

$$M = -\frac{5 \pm \sqrt{-27}}{2}.$$

In der Hurwitz'schen Dissertation ist die Discriminante -3 für alle möglichen Transformationsgrade durchdiscutirt. Es ergiebt sich dabei der allgemeine Satz (in Uebereinstimmung mit pg 235):

Jedem Factor ν des Transformationsgrades n entspricht eine Wurzel der Multiplicatorgleichung, welche gerade gleich ν ist. Die übrigen Wurzeln der Multiplicatorgleichung sind dreifach.

Hurwitz giebt die entsprechenden

Entwickelungen auch noch im Falle $d = -4$, d. h. für die zweite Ecke des Fundamentaldreiecks, wo $g_3 = 0$ und daher $J = 1$ ist.

16. VII. 96. Das allgemeine Ziel, welches wir bei den folgenden Entwickelungen im Auge haben, soll dieses sein:

<u>Näheres über die Natur der singulären Invarianten j, welche zu dem vorgegebenen Werthe $-\nabla$ gehören, zu erfahren.</u>

Wir werden uns dabei in erster Linie auf die <u>Transformationsgleichung $F(j', j) = 0$</u> stützen, in zweiter Linie auch auf die <u>Multiplicatorgleichung</u> $\Phi(M, j) = 0$.

Wir fragen uns vor allen Dingen <u>wann in der Transformationsgleichung $F(j', j) = 0$ für irgend einen Transformationsgrad n $j' = j$ werden kann.</u> Wir betrachten also die Gleichung:

$$F(j, j) = 0$$

und haben damit den Ausgangspunkt der Kronecker'schen Ent-

wickelungen, nur dass Kronecker nicht das j, sondern das k' oder auch $k^2(1-k^2)$ etc. als fundamentalen Modul benutzt.

Zunächst erkennt man leicht, dass unsere Gleichung lauter singuläre Invarianten j definirt.

Sei nämlich ω der zu dem Werthe j gehörige Periodenquotient, welcher bis auf Transformationen erster Ordnung bestimmt ist. Durch Transformation n^{ter} Ordnung entstehe aus ω der Werth

$$\omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}, \quad ad - bc = n.$$

Soll nun $j' = j(\omega')$ mit $j = j(\omega)$ zusammenfallen, so muss ω' mit ω aequivalent sein. Wir können in der letzten Gleichung direkt $\omega' = \omega$ setzen, indem wir die Transformation erster Ordnung, durch welche ω' aus ω erhalten wird, auf die rechte Seite der Gleichung werfen und die Bedeutung der

Zahlen a, b, c, d dementsprechend in passender Weise abändern. Wir erhalten so für ω die folgende ganzzahlige Gleichung

$$c\omega^2 + (d-a)\omega - b = 0.$$

Die zugehörigen Werthe von J sind daher sicher singuläre Invarianten.

Wir haben bereits pg. 234 einen Fall kennen gelernt, indem eine Wurzel J' der Transformationsgleichung $F(J'J) = 0$ speciell gleich J wird. Dieses trat dann ein, wenn der Transformationsgrad p in zwei Factoren π und $\bar{\pi}$ zerfällt, welche in dem zu der Discriminante $-\Delta$ gehörigen Hauptgitter liegen. Aus dem Satze von pg. 230 ergiebt sich leicht, dass auch das Umgekehrte richtig ist. Soll nämlich J' überhaupt gleich einer Invariante werden, welche zu derselben Discriminante gehört, wie $J = J_\alpha$, so muss sich p in dem Gitter G_p zerlegen lassen und J' einen der Werthe $J_{\alpha-\beta}$ oder

$j\alpha+\beta$ haben. Soll nun speciell $j' = j\alpha$ werden, so muss G_p das Hauptgitter werden, p also durch die zu $-\nabla$ gehörige Hauptform darstellbar sein. Uebertragen wir dieses Resultat von dem Primzahlgrade p auf einen beliebigen Grad n, so werden wir den Satz aufstellen:

Soll in der Transformationsgleichung $j' = j$ werden, so muss der Transformationsgrad n durch die Hauptform derjenigen Discriminante $-\nabla$ darstellbar sein, welche zu j gehört. Es wird in unserer Gleichung soviele Wurzeln $j' = j$ geben als verschiedene Zerlegungen $n = \nu\bar{\nu}$ in dem betr. Hauptgitter möglich sind.

Der vorstehende Satz lässt sich auch ganz direkt beweisen. Soll j der Gleichung $F(j, j) = 0$ genügen, so muss nach dem oben Gesagten ein zu j gehöriger Werth ω eine Relation:

$$\omega = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}, \quad ad - bc = n$$

befriedigen.

Schreiben wir dieselbe in Form einer quadratischen Gleichung:

$$c\omega^2 + (d-a)\omega + b = 0,$$

so werden im allgemeinen c, $d-a$, b einen gemeinsamen Theiler, sagen wir u haben, nach dessen Fortschaffung die Gleichung lauten möge:

$$P\omega^2 + Q\omega + R = 0,$$

so dass wir haben

$$c = Pu \quad d - a = Qu \quad - b = Ru$$

Setzen wir noch $a + d = t$, so können wir die vier Coefficienten a, b, c, d durch die Coefficienten unserer quadratischen Gleichung und t ausdrücken:

$$a = \frac{t - Qu}{2},\ b = -Ru,\ c = Pu,\ d = \frac{t + Qu}{2}.$$

Nun muss aber $ad - bc = n$ sein oder, wenn wir die Discriminante von $P\omega^2 + Q\omega + R = 0$ mit $-\nabla$ be-

zeichnen:

$$\frac{t^2 + \nabla u^2}{4} = n.$$

Aus dieser Gleichung folgt aber leicht, wie eine kleine Umrechnung zeigt, daß n durch die zu $-\nabla$ gehörige Hauptform darstellbar ist und zwar einerlei, ob ∇ durch 4 theilbar ist oder nicht.

Umgekehrt erkennt man, daß jede Lösung unserer Gleichung eine Transformation n^{ter} Ordnung bestimmt, welche die Invariante j in sich verwandelt. Diese Aussage deckt sich aber mit dem zweiten Theile unseres Satzes.

Allerdings werden die so erhaltenen Transformationen n^{ter} Ordnung, wenn n einen quadratischen Teiler τ^2 enthält, zum Theil uneigentliche Transformationen sein können. Haben wir nämlich ein Lösungssystem t, u mit dem gemeinschaftlichen Theiler τ, so tritt derselbe Theiler auch in a, b, c, d auf. Da wir aber bei der Auf-

stellung der Transformationsglei-
chung $F(j'-j)=0$ nur eigentliche
Transformationen berücksichtigt
haben, so sind die entsprechenden
Werthe von j als Wurzeln un-
serer Gleichung nicht mitzu-
zählen.

Wir wollen jetzt dazu übergehen,
die Anzahl der Wurzeln von $F(jj)=0$
zu bestimmen. Zu dem Zwecke su-
chen wir uns die Anzahl der in-
aequivalenten ω, zu denen unsere
j gehören. An sich gehören natürlich
zu jedem j unendlich viele ω; von
diesen können wir aber jedesmal
ein reducirtes ω isoliren. Aus der
Anzahl dieser reducirten ω wird
dann die Anzahl der gesuchten j
leicht folgen.

Wir haben also jetzt alle Gitter
aufzusuchen, zu denen quadratische
Formen $(c, d-a, b)$ gehören, deren
Coeffizienten die Relation $ad-bc=n$
zu befriedigen gestatten. Zu diesem
Zwecke untersuchen wir zuvör.

derst, welche Werthe die Discriminanten unserer Gitter annehmen können. Wir haben dieselben bisher mit $-\nabla u^2$ bezeichnet, wollen jetzt aber einfach $(-\nabla)$ dafür schreiben, indem wir $u = 1$ setzen, was zu keinen Irrthümern Anlaß geben wird. Natürlich können jetzt die Zahlen P, Q, R auch einen gemeinsamen Theiler haben.

Der Werth ∇ muß dann, wie gezeigt ist, so gewählt werden, daß

$$n = \frac{t^2 + \nabla}{4}$$

gemacht werden kann, d. h. es muß sein:

$$\nabla = 4 \cdot n - t^2$$

Da ∇ positiv sein muß, können wir hier für t setzen:

$$t = 0, \pm 1 \pm 2 \ldots \pm E(2\sqrt{n}).$$

Die sämmtlichen Discriminantenwerthe, zu denen unsere gesuchten Gitter gehören, sind also:

$4n, 4n-1, 4n-4, \ldots \quad 4n - [E(2\sqrt{n})]^2$.

Zu jedem Werthe von $-\nabla$ gehören nun eine Anzahl reducirter Formen (P', Q, R') [denn nur diese brauchen wir zu beachten, da wir ja nach Gittern und nicht nach Formen fragen], die uns mit Hülfe der Grösse t ein System von Coefficienten a, b, c, d zu berechnen gestatten. Wir haben nämlich:

$$a = \frac{t-Q}{2} \quad b = -R' \quad c = P' \quad d = \frac{t+Q}{2}$$

Jede reducirte Form liefert also, je nachdem $t = 0$ oder $|t| > 0$ ist, ein oder 2 Coefficientensysteme. Dementsprechend hat die Gleichung $F(j(\omega), j'(\omega)) = 0$ eine einfache Wurzel im Falle $t = 0$, eine doppelte im Falle $|t| > 0$.

Hierbei ist abermals zu bemerken, dass sich die Gleichung $F(j, j') = 0$ nur auf eigentliche Transformationen bezieht. Wir müssen daher unterscheiden zwischen solchen Wer-

then von t, für welche die Coeffici-
enten

$$\frac{t-Q}{2}\,,\ -\mathfrak{R}',\ \mathfrak{P}',\ \frac{t+Q}{2}$$

theilerfremd und zwischen solchen
für welche sie theilerhaltig sind.

Wir können jetzt direkt die Anzahl
der Wurzeln unserer Gleichung $F(\mathfrak{z},\mathfrak{z})=0$
abzählen. Wir bezeichneten früher
mit $h(\nabla)$ die Zahl der primitiven,
mit $H(\nabla)$ die Zahl aller Klassen
quadratischer Formen, welche zur
Discriminante $-\nabla$ gehören. Ausser-
dem führen wir noch die Bezeich-
nung $H'(\nabla)$ für die Anzahl der-
jenigen Classen $(\mathfrak{P}, Q, \mathfrak{R})$ der Dis-
criminante $-\nabla$ ein, für welche
die Zahlen

$$\frac{t \pm Q}{2}\,,\ \mathfrak{P}' \text{ und } \mathfrak{R}'$$

theilerfremd sind. Alsdann folgt
aus der soeben beschriebenen Auf-
zählung der Verschwindungspunkte
von $F(\mathfrak{z},\mathfrak{z})$ in der ω-Ebene, daß

ihre Anzahl gleich.

$$\mathcal{H}'(4n)+2\mathcal{H}'(4n-1)+2\mathcal{H}'(4n-4)+\text{etc.}+2\mathcal{H}'(4n-E\sqrt{n})$$

oder kürzer geschrieben gleich

$$\sum \mathcal{H}'(4n-t^2)$$

wird, wo t die Werthe $0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm 2E(\sqrt{n})$ durchläuft.

Unsere Abzählung bezog sich auf den reducirten Raum der ω-Ebene. Die vorstehende Formel giebt die Anzahl derjenigen reducirten ω, für welche $F(J(\omega), J(\omega)) = 0$ ist. Wir wünschen aber vielmehr den in J gemessenen Grad der Gleichung $F(J, J) = 0$ zu kennen, d. h. die Anzahl der Wurzeln dieser Gleichung in der J-Ebene zu bestimmen. Zu diesem Zwecke müssen wir uns die conforme Abbildung des einzelnen ω-Dreiecks auf die J-Ebene gegenwärtig halten. Nach Früherem wird im Allgemeinen die Umgebung jeder Stelle ω

auf die j-Ebene eindeutig abgebildet. Nur die Punkte $\omega = i$ bez. $\omega = \varrho$ liefern eine zweifache bez. eine dreifache Ueberdeckung der zugehörigen Stellen $j = 1728$ bez. $j = 0$. Ein einfacher Nullpunkt $\omega = i$ bez. $\omega = \varrho$ ist daher in der j-Ebene mit der Multiplicität $\frac{1}{2}$ bez. $\frac{1}{3}$ zu rechnen. Dem Werthe $j = 1728$ entspricht die quadratische Gleichung $\omega^2 + 1 = 0$ d. h. die quadratische Form $(P, 0, P)$; andrerseits gehört zu dem Werthe $j = 0$ die quadratische Gleichung $\omega^2 + \omega + 1 = 0$, d. h. die Form (P, P, P). Hiernach müssen wir sagen:

Die Anzahl der Wurzeln von $F(j, j) = 0$ in der j-Ebene ist ebenfalls gegeben durch

$$\sum H'(4n - t^2);$$

nur haben wir jetzt bei der Auswerthung dieser Summe die Classen $(P, 0, P)$ mit der Hälfte, die Classen (P, P, P) mit dem dritten Theile der zunächst sich

ergebenden Anzahlen in Rechnung zu setzen.

Wir wollen dieselbe Thatsache noch etwas anders ausdrücken, indem wir von der Riemann'schen Fläche $F(J'J)=0$ sprechen. Auf dieser Fläche befindet sich jedes Wertepaar $(J'J)$ durch einen und nur durch einen Punkt vertreten. Wir fassen nun diejenigen Stellen in's Auge, in welchen die auf der Fläche eindeutige Function $J'-J$ verschwindet. Die Anzahl dieser (mit der richtigen Multiplicität gezählten) Stellen stimmt genau mit dem soeben bestimmten Grade der Gleichung $F(J'J)=0$ überein.

Nach den früheren Erörterungen über das Transformationspolygon in der ω-Ebene kennen wir nämlich die Riemann'sche Fläche $F(J',J)=0$. Dieselbe entsteht aus jenem Polygon durch Zusammenbiegen der Ränder und hat Verzweigungspunkte nur in den Stellen $J=0$,

1728 und ∞, welche den Ecken der Fundamentaldreiecke in der ω-Ebene entsprechen. Hiernach findet sich jede von ∞, 0 und 1728 verschiedene Stelle der J-Ebene auf den verschiedenen Blättern der Riemann'schen Fläche in conformer Uebertragung vor. Haben wir also in der J-Ebene eine Wurzel der Gleichung $F(J', J) = 0$, von gewisser Multiplicität, so haben wir auf der Riemann'schen Fläche $F(J', J) = 0$ eine Verschwindungsstelle $J' - J = 0$ von derselben Multiplicität. Dies gilt zunächst unter der Voraussetzung $J \neq 0$ oder 1728; (die Stelle $J = \infty$ kommt für unsere Frage überhaupt nicht in Betracht). Betrachten wir nun die Stellen $J = 0$ und $J = 1728$. Hier ist die J-Ebene allgemein zu reden von drei bez. von zweifachen Windungspunkten unserer Riemann'schen Fläche überlagert.

Wir behaupten aber, dass an

diesen Stellen ausserdem eine Anzahl unverzweigter Blätter verlaufen und dass diese gerade die uns interessirenden Werthepaare (0,0) bez. (1728, 1728) tragen. Der Beweis ergiebt sich unmittelbar aus den Reihenentwickelungen von j und j' in der ω-Ebene. Wir haben einerseits für die dem Werthe $j=0$ benachbarten Werthe die Entwickelung

$$j = c_1(\omega-\varrho)^3 + c_2(\omega-\varrho)^6 + \dots .$$

Gleichzeitig erhalten wir durch Transformation n^{ter} Ordnung für j', falls j' mit j zusammenfällt, die folgende Entwickelung

$$j' = c_1'(\omega-\varrho)^3 + c_2'(\omega-\varrho)^6 + \dots .$$

Durch Elimination von ω ergiebt sich für j eine nach ganzen Potenzen von j' und ebenso für j' eine nach ganzen Potenzen von j fortschreitende Entwickelung. Dieselbe zeigt, dass dasjenige Blatt der Riemann'schen Fläche, welches die Stelle $j=0$, $j'=0$ trägt, an dieser Stelle unverzweigt ist. Das Entsprechende gilt für die Stelle $j=1728$, $j'=1728$. Hiernach ist klar, dass sich die

<u>Nullpunkte von der j-Ebene mit ungeänderter Multiplicität auf die Riemann'sche Fläche übertragen.</u>

<u>Mithin hat die Function $j'-j$ auf unserer Riemann'schen Fläche soviele Nullstellen, als die Gleichung $F(j,j)=0$ in der j-Ebene Wurzeln besitzt, nämlich</u>

$$\sum H'(4n-t^2)$$

<u>wobei für die Berechnung dieser Summe die Bemerkungen von pg. in Kraft bleiben.</u>

Wir schliessen hier einen kleinen Excurs über die sogenannten <u>Kronecker'schen Classenzahlrelationen an</u>, welche interessante Beziehungen zwischen verschiedenen zahlentheoretischen Functionen ergeben.

In unseren Endformeln werden wir wünschen, statt der Klassen-

zahlen H', deren Definition (vergl. pg. 259) eine etwas künstliche war, die Klassenzahlen H, d. h. die Anzahlen aller primitiven oder imprimitiven Classen derselben Discriminante figuriren zu sehen.

Wir erreichen dieses dadurch, dass wir zu der bisherigen Transformationsgleichung $F(J', J) = 0$ (ausführlicher geschrieben: $F_n(J', J) = 0$, da es sich um alle eingentlichen Transformationen n^{ter} Ordnung handelt) die sämmtlichen Gleichungen

$$F_{\frac{n}{\tau^2}}(J', J) = 0,$$

wo τ die sämmtlichen quadratischen Theiler von n durchläuft, hinzunehmen. Jede einzelne dieser Gleichungen liefert die eigentlichen Transformationen von der Ordnung $\frac{n}{\tau^2}$ oder wie wir sagen können, die un-

eigentlichen Transformationen n^{ter} Ordnung mit dem gemeinsamen Factor τ. Alle Werthe von j, welche bei diesen uneigentlichen Transformationen in sich übergehen, werden durch die Gleichung

$$F_{\frac{n}{\tau^2}}(j, j) = 0$$

erhalten. Mithin bekommen wir die Gesammtheit aller Werthe j, welche bei den eigentlichen und uneigentlichen Transformationen n^{ter} Ordnung ungeändert bleiben, aus der Gleichung

$$\prod_{(\tau)} F_{\frac{n}{\tau^2}}(j, j) = 0.$$

Der Grad dieser Gleichung ergiebt sich sofort aus dem Grade von $F_n(j, j) = 0$. Da der letztere gleich $\sum H'(4n - t^2)$ war, so wird der erstere ersichtlich

gleich

$$\sum H(4n - t^2).$$

Wir haben nämlich jetzt einfach die Nichttheilbarkeitsbedingung von pg. 259 unberücksichtigt zu lassen, und dementsprechend H' durch H zu ersetzen.

Diese Formel bedarf einer Ergänzung, wenn n eine reine Quadratzahl ist. In diesem Falle müssen wir jedenfalls festsetzen daß bei der Bildung unserer Gleichung $\prod_\tau F_{\frac{n}{\tau^2}}(J, J) = 0$ nur solche Zahlen τ benutzt werden, welche kleiner als $(\sqrt{n})$ sind. Wollten wir nämlich $\tau = \sqrt{n}$ setzen, so würde in unserer Gleichung der Factor

$$F_1(J, J)$$

vorkommen, welcher da J bei beliebigen Transformationen erster Ordnung ungeändert bleibt, identisch verschwinden würde.

Dementsprechend werden wir auch bei der Berechnung von

$\sum H(4n-t^2)$ diejenigen Classen (P, Q, R) nicht mitzählen dürfen, welche bei einer Transformation erster Ordnung ungeändert bleiben. Die Discussion der Pell'schen Gleichung, die jetzt auf die gewöhnliche Form

$$\frac{t^2 + \nabla u^2}{4} = 1$$

zurückkommt, zeigt dass in unserer Summe 3 solche Classen vorkommen, nämlich $u = 1, \nabla = 3, t = \pm 1$ und $u = 1, \nabla = 4, t = 0$. Ersichtlich liefern die beiden ersten Lösungen als zugehörige Invariante $j = 0$, die dritte $j = 1728$; zu dem Werthe $\sum H$ würden die beiden ersten nach unserer früheren Verabredung $2/3$, die dritte $1/2$ Einheiten beitragen. Diesen Betrag haben wir also in Abzug zu bringen. <u>Mithin wird der Grad der Gleichung $\Pi F = 0$, im Falle n ein vollständiges Quadrat ist, gleich</u>

$$\underline{\sum H(4n-t^2) - 7/6}.$$

Die somit bestimmte Anzahl berechnen wir jetzt noch auf eine zweite Weise. Wir knüpfen dabei an die Riemann'sche Fläche an, welche zu der Gleichung $\Pi F(j'j)=0$ gehört. Diese Fläche besteht aus der Ueberlagerung einer Reihe einzelner Riemann'scher Flächen, welche bez. durch die Gleichung $F_{\frac{n}{t}}(j'j)=0$ gegeben sind und deren Charakter wir pg. 262 ff studirt haben. Die fragliche Anzahl ist nun gleich der Zahl der Verschwindungspunkte von $j'-j$ auf der so entstehenden Gesammtfläche. Andrerseits wissen wir aus der Functionentheorie, daß die Zahl der Verschwindungspunkte einer algebraischen Function gleich ist der Zahl ihrer Unendlichkeitspunkte. Die Unendlichkeitsstellen von $j'-j$ liegen sämmtlich bei $j=\infty$; ihre Anzahl sowie ihre Vertheilung auf die verschiedenen Blätter der Fläche lassen sich aus den bekannten

nach $u = e^{2i\pi\omega}$ fortschreitenden Reihen von j' ablesen. Es ergiebt sich als Resultat, wie wir hier nur historisch anführen:

Die Anzahl der bei $j = \infty$ in den verschiedenen Blättern liegenden Unendlichkeitsstellen beträgt

1. Wenn n keine Quadratzahl ist:

$$\Phi(n) + \Psi(n),$$

2. wenn aber n gleich dem Quadrat einer ganzen Zahl ist:

$$\Phi(n) + \Psi(n) - 1.$$

Hier verstehen wir unter $\Phi(n)$ die Theilersumme von n, sodaß, unter δ einen beliebigen Theiler von n verstanden,

$$\Phi(n) = \Sigma\,\delta$$

wird. Ferner wird

$$\Psi(n) = \Sigma\,\delta' - \Sigma\,\delta'',$$

wo δ' bez. δ'' diejenigen Theiler

zu durchlaufen haben, welche grösser bez. kleiner als $\sqrt{n}$ sind.

Durch Vergleich unserer Formeln für die Null- und Unendlichkeitsstellen kommen wir zu der folgenden merkwürdigen Relation:

1. im Falle eines allgemeinen n:

$$\mathcal{H}(4n) + 2\mathcal{H}(4n-1) + 2\mathcal{H}(4n-4) + \ldots$$
$$2\mathcal{H}(4n-t^2) = \Phi(n) + \Psi(n). \; [t = 2E(|\sqrt{n}|)].$$

2. im Falle eines quadratischen n:

$$\mathcal{H}(4n) + 2\mathcal{H}(4n-1) + 2\mathcal{H}(4n-4) + \ldots 2\mathcal{H}(4n-t^2)$$
$$-\tfrac{1}{6} = \Phi(n) + \Psi(n) - 1. \; [t = 2\sqrt{n} - 1].$$

Wir bezeichnen diese Relationen als Classenzahlrelationen erster Stufe, im Gegensatz zu den Classenzahlrelationen höherer Stufe, welche wir später kennen lernen werden. Die letzteren werden wir aus den Invarianten der höheren Stufen ähnlich ableiten, wie die vorstehenden aus der Invariante J.

Unsere Relationen sind zuerst von Kronecker im Jahre 1858 aufge-

stellt; später sind sie ins Besondere von Gierster entwickelt worden. Vergl. hierzu die historischen Bemerkungen in Klein-Fricke II, Abschn. 4, Cap. 5 und 6 pg. 160 ff.

Das Interesse der Klassenzahlrelationen besteht in erster Linie darin, dass sie die complicirte zahlentheoretische Function H mit den elementaren Functionen Φ und Ψ in Beziehung setzt und die erstere aus den letzteren zu berechnen gestattet.

Zu den beiden soeben unterschiedenen Fällen (n allgemein und n quadratisch) geben wir je ein numerisches Beispiel.

1. $n = 12$.

Die linke Seite unserer Relation besteht aus den Termen:

$H(48) + 2H(47) + 2H(44) + 2H(39)$
$+ 2H(32) + 2H(23) + 2H(12)$.

Die Zahlen H reduciren wir zunächst durch Abspalten der quadratischen Theiler auf die Zahlen h. So ergiebt sich z. B.

$$H(48) = h(48) + h(12) + h(3).$$

Die Zahlen h ihrerseits entnehmen wir aus den Cayley'schen Tabellen, wobei wir nur berücksichtigen müssen, daß nach unserer Verabredung die Anzahl der Classen (P, P, P) bez. $(P, 0, P)$ mit $1/3$ bez. $1/2$ zu multipliciren ist.

In solcher Weise finden wir:

$$
\begin{aligned}
H(48) &= h(48) + h(12) + h(3) &&= 2 + 1 + 1/3 \\
2H(47) &= 2h(47) &&= 10 \\
2H(44) &= 2h(44) + 2h(11) &&= 6 + 2 \\
2H(39) &= 2h(39) &&= 8 \\
2H(32) &= 2h(32) + 2h(8) &&= 4 + 2 \\
2H(23) &= 2h(23) &&= 6 \\
2H(12) &= 2h(12) + 2h(3) &&= 2 + \tfrac{2}{3} \\
\hline
&\text{In Summa} &&= 44.
\end{aligned}
$$

Andererseits haben wir

$$
\begin{aligned}
\Phi(12) &= 12 + 6 + 4 + 3 + 2 + 1 = 28 \\
\Psi(n) &= 12 + 6 + 4 - 3 - 2 - 1 = 16 \\
\hline
&\text{In Summa} \quad 44
\end{aligned}
$$

2. <u>$n = 16.$</u>

Hier haben wir zunächst zu berechnen

$$H(64) + 2H(63) + 2H(60) + 2H(55) + 2H(48) + 2H(39) + 2H(28) + 2H(15).$$

Aus den Cayley'schen Tabellen ergiebt sich mit Rücksicht auf unsere Verabredungen:

$$\begin{aligned}
H(64) &= h(64) + h(16) + h(4) &&= 2 + 1 + 1/2 \\
2H(63) &= 2h(63) + 2h(7) &&= 8 + 2 \\
2H(60) &= 2h(60) + 2h(15) &&= 4 + 4 \\
2H(55) &= 2h(55) &&= 8 \\
2H(48) &= 2h(48) + 2h(12) + 2h(3) &&= 4 + 2 + 2/3 \\
2H(39) &= 2h(39) &&= 8 \\
2H(28) &= 2h(28) + 2h(7) &&= 2 + 2 \\
2H(15) &= 2h(15) &&= 4
\end{aligned}$$

In Summa $52\ 1/6$

Die linke Seite der Klassenzahlrelation beträgt daher wegen des Subtrahenten $7/6$: <u>51.</u>

Andererseits wird

$$\Phi(n) = 16 + 8 + 4 + 2 + 1 \qquad = 31$$
$$\Psi(n) - 1 = 16 + 8 \qquad - 2 - 1 - 1 \qquad = 20$$

Die rechte Seite unserer Relation giebt also wirklich gleichfalls

$$31 + 20 = \underline{51}.$$

Nach diesem Excurse kehren wir zu der Gleichung $F(j, j) = 0$ zurück. Wir haben pg. 258 die Wurzeln dieser Gleichung in eine Reihe von Kategorien gespalten, je nach den zugehörigen Werthen der Discriminante $-\nabla$. Die bezüglichen Werthe waren

$\nabla = 4n, \; 4n-1, \; 4n-4,$ etc.

Die Wurzeln der 1ten (zu $\nabla = 4n$) gehörigen Kategorie waren einfache, die der übrigen doppelte Wurzeln unserer Gleichung.*) Wir werden uns nun die linke Seite von $F(j, j) = 0$

---

*) Hierbei ist der Kürze halber von der etwaigen Multiplicität der Wurzeln $j = 0$ und $j = 1728$ abgesehen.

in ebenso viele Bestandtheile gespalten denken, als es unterschiedene Kategorien giebt. Wir können etwa schreiben:

1) $\mathfrak{F}(j, J) = X'_{4n}(j) \cdot [X'_{4n-1}(j)]^2 \cdot$
$[X'_{4n-4}(j)]^2 \cdot [\ldots]$.

Der Grad des einzelnen Bestandtheiles in j beträgt nach pag. 259 bez.

$H'(4n)$, $H'(4n-1)$, $H'(4n-4)$, ...

Neben den Ausdrücken X' führen wir sogleich gewisse ähnlich gebaute Ausdrücke X und χ ein, welche zu H und h in demselben Verhältniß stehen wie X' zu H'! Es soll nämlich $X_\nabla(j)$, gleich Null gesetzt, alle diejenigen in der Anzahl H vorhandenen Invarianten primitiver oder imprimitiver Classen liefern, welche zur Discriminante $-\nabla$ gehören. Ebenso soll $\chi_\nabla(j) = 0$ die in der Anzahl h vorhande-

nen Invarianten primitiver Classen von der Discriminante $-\nabla$ bestimmen. Die Gleichung $\chi_\nabla(j)=0$ bez. $X'_\nabla(j)=0$ werden wir als (primitive bez. imprimitive) Classengleichung bezeichnen.

Natürlich steckt χ_∇ im X'_∇ und dieses im X_∇ als ein Factor.

Unser Ziel soll es nun sein, durch Benutzung der zu den verschiedenen Werthen von n gehörigen Gleichungen $F_n(j, j')=0$ für jedes ∇ eine Classengleichung $\chi_\nabla(j)=0$ zu isoliren. Das Hauptresultat dieser Untersuchung wird folgendes sein. Die Classengleichung ist ebenso wie die Transformationsgleichung eine ganzzahlige algebraische Gleichung, deren höchster Coefficient der Einheit gleichkommt.

Zuvörderst wollen wir an der Gleichung 1) eine kleine Vereinfachung vornehmen. Wir wollen nämlich rechts und links diejenigen

Factoren fortheben, welche zu den Discriminanten $-\nabla = -3$ und $-\nabla = -4$ gehören, oder zu solchen Discriminanten, die sich von -3 und -4 nur um einen quadratischen Factor unterscheiden. Die entsprechenden Werthe von j sind $j = 0$ und $j = 1728$. Diese Werthe von j machten uns früher bei der Abzählung des Grades der Transformationsgleichung Schwierigkeiten, überdies interessiren sie uns jetzt nicht mehr, insofern wir uns mit der Gleichung $X_\nabla(j) = 0$ beschäftigen wollen. Die in solcher Weise durch Forthebung der Factoren (j) und $(j-1728)$ vereinfachte Gleichung mögen wir etwa die „gereinigte Transformationsgleichung" nennen.

Wir führen nun den Nachweis, daß wir die einzelne Classengleichung $X_\nabla(j)$ stets mittelst rationaler Processe aus unseren gereinigten Transformati-

onsgleichungen herstellen können. Wir wollen zu dem Zweck voraussetzen, dass dies bereits für alle $\nabla \leqq 4n-4$ geschehen sei, und werden jetzt beweisen, dass wir dann auch die Classengleichungen für $\nabla = 4n-1$ und $\nabla = 4n$ rational berechnen können. Wir bilden:

$$\mathfrak{F}_{4n}(jj) = X'_{4n}(j)\left[X_{4n-1}(j)\right]^2 : \left[X'_{4n-4}(j)\right]^2.$$

Hier sind, wie man sofort aus unserer Annahme schliesst alle Factoren von $\left[X'_{4n-4}(j)\right]^2$ an rational bekannt, wir können daher

$$X'_{4n}(j)\left[X'_{4n-1}(j)\right]^2$$

durch einfache Division berechnen.

Stellt man jetzt die grossen X durch die kleinen χ dar und ordnet die letzteren nach der Grösse der zu-

gehörigen Determinanten, so werden die Anfangsglieder des letzten Produktes offenbar $X_{4n}(X_{4n-1})^2$. Was noch folgt, sind lauter Faktoren X_i für kleinere Determinanten. Da wir diese als rational bekannt angesehen haben, können wir sie einfach fortlassen; es ist somit auch das Produkt

$X_{4n}(X_{4n-1})^2$ rational herstellbar.

Bemerken wir jetzt noch, dass die Gleichung X_{4n} keine Doppelwurzel besitzt, so ergiebt sich nach bekannten Sätzen der Gleichungstheorie sofort, dass man aus dem Produkt $X_{4n}(X_{4n-1})^2$ rational die Factoren X_{4n} und X_{4n-1} abspalten kann, was wir zeigen wollten.

Um unseren Beweis vollständig zu machen, zeigen wir jetzt noch, dass X_8 und X_7 rational berechnet werden können. Bilden wir nämlich $F_2(f,f)$, so ergiebt sich:

$$F_2(f,f) = X_8'(f)\,[X_7'(f)]^2,$$

indem wir die Determinanten -4, -3 unberücksichtigt lassen. Nun ist weiter:

$$X_8'(j) = X_8(j), \quad X_7'(j) = X_7(j),$$

immer unter der Voraussetzung, dass wir $X_4(j)$ und $X_3(j)$ unterdrücken.

Es folgt also:

$$\mathfrak{F}_2(j,j) = X_8(j) \left[X_7(j) \right]^2.$$

Damit ist aber gezeigt, dass $X_8(j)$ und $X_7(j)$ rational berechnet werden können. Uebrigens sind $X_8(j) = 0$ und $X_7(j) = 0$ sogar Gleichungen ersten Grades, also die zugehörigen j rational, da sowohl für $\nabla = 8$ wie für $\nabla = 7$ nur eine Classe existirt.

Wir gewinnen so ganz allgemein das Resultat:

<u>Die Gleichung h^{ten} Grades $X_\nabla(j) = 0$ welche die h zur Discriminante $-\nabla$ gehörigen singulären j bestimmt, ist eine Gleichung mit ganzzahligen Coefficienten.</u>

Wir behaupten aber ferner:

<u>Der Coefficient des höchsten Gliedes in dieser Gleichung ist gleich 1.</u>

Der Beweiss lässt sich so führen, daß man zunächst zeigt: <u>Das höchste Glied der Gleichung $F(j'j) = 0$ hat zum Coefficienten die Einheit</u>. Dies gelingt in der Weise, daß man sich das Bildungsgesetz der Coefficienten von $F(j';j)$ aus den Reihenentwickelungen von j und j' nach Potenzen von r klar macht. Zunächst erkennt man, solange n kein volles Quadrat ist, daß der höchste Coefficient an sich gleich 1 wird. Ist aber n ein volles Quadrat, so wird der höchste Coefficient zwar gleich $\sqrt{n}$; gleichzeitig nehmen aber auch alle übrigen Coefficienten den Factor $\sqrt{n}$ an, so daß wir nach Forthebung desselben wieder als ersten Coefficienten die Eins übrig behalten. —

Bei der Zerlegung der Gl. $F = 0$ in die einzelnen Theilgleichungen

$x=0$ geht nun offenbar die Eigenschaft, die Einheit zum höchsten Coefficienten zu haben, auf alle Theilgleichungen über.

Es ist dies hier nicht weiter auszuführen, weil es algebraisch ganz einfach ist.

Wir mögen dieses Resultat so ausdrücken, dass wir sagen:

Die h singulären Werthe von j sind nicht nur algebraische Zahlen schlechtweg, sondern sie sind ganze algebraische Zahlen. –

Das Verfahren, welches wir bei der Aufstellung der Classengleichung befolgten, ist allerdings ein rein theoretisches. Für die numerische Durchführung wäre es sehr unpraktisch, von der Transformationsgleichung des j seinen Ausgang zu nehmen, weil die Gleichung, wie wir sahen, schon für kleine Transformationsgrade ungeheuer complicirt ist. Hier treten die Moduln höherer Stufe in ihr Recht, wie weiter unten

noch näher auszuführen.

Wir theilen die Classengleichung für die allereinfachsten Fälle

$$\nabla = 3, 4, 7, 8$$

im Anschluße an Weber mit. In den beiden ersten Fällen lautet sie natürlich

$$j = 0 \text{ und } j - 1728 = 0.$$

Auch in den beiden folgenden Fällen ist noch $h = 1$. Man findet hier als Classengleichung:

$$j + 3375 = 0 \text{ bez. } j - 8000 = 0.$$

23. VII. 96. Unsere nächste Aufgabe soll es jetzt sein, die Classengleichung $X_\nabla = 0$ näher zu studiren.

Im Allgemeinen kann man bei der Untersuchung einer algebraischen Gleichung zwei verschiedene Gesichtspunkte verfolgen. Man kann sich entweder die Aufgabe stellen, die Wurzeln der Gleichung zu separiren, sie numerisch mit vorgegebener Genauigkeit zu berechnen;

im Anschlusse hieran wird man die Frage entscheiden, wie viele Wurzeln reell werden etc. Andrerseits kann man die Gleichung daraufhin untersuchen, ob sie durch Wurzelzeichen lösbar ist oder, wenn dieses nicht der Fall ist, welches die einfachsten Irrationalitäten sind, mit deren Hülfe die Gleichung sich reduciren lässt. Die erste Art der Fragestellung bezeichnet man wohl als die <u>numerische</u>, die zweite als die <u>algebraische Auflösung der Gleichungen.</u>

Was die erstere Art der Untersuchung betrifft, so ist dieselbe bei unserer Classengleichung eigentlich schon implicite erledigt. Indem wir die zu der vorgelegten Discriminante $-\nabla$ gehörigen reducirten Formen $p\omega^2 + q\omega + r$ aufzählen, bekommen wir durch Nullsetzen derselben eine Anzahl von Punkten ω in dem reducirten

Dreiecke der Modultheilung. Die Trennung der Wurzeln unserer Gleichung ist damit geleistet. Von den Werthen ω kommen wir mittelst der bekannten Potenzentwickelungen zu den zugehörigen Werthen von J. Diese lassen sich hiernach mit beliebiger Genauigkeit numerisch berechnen. Auch die Frage nach der Realität der Wurzeln erledigt sich leicht. Es fallen nämlich diejenigen und nur diejenigen Werthe von J auf die reelle Axe der J-Ebene, deren zugehörige ω-Werthe auf der Begrenzung bez. der Mittellinie des reducirten Dreiecks liegen. Diese entsprechen bekanntermassen den Anceps-Formen. Wir haben also unter den Wurzeln der Classengleichung soviel reelle Werthe, als es Ancepsclassen der Discriminante $-\nabla$ giebt.

Gehen wir nun zu der zweiten Art der Betrachtung über. Wir

haben in dieser Hinsicht das einfache Resultat zu beweisen:

<u>Unsere Classengleichung ist im Rationalitätsbereiche $V - \nabla$ eine Abel'sche Gleichung.</u>

Bekanntlich heisst eine Gleichung dann eine <u>Abel'sche Gleichung</u>, wenn jede Wurzel rational durch jede andere ausgedrückt werden kann und wenn die rationalen Operationen, durch welche man von einer Wurzel zu einer beliebigen anderen übergeht, gegen einander vertauschbar sind.

In unserem Falle wird sich sogar noch etwas Weiteres ergeben. <u>Die Form der rationalen Function, welche aus j_α eine andere Wurzel $j_{\alpha+\beta}$ entstehen lässt, hängt lediglich von dem Werthe β ab und ist für alle Werthe von α dieselbe.</u> Wir können dieses so ausdrücken, dass wir schreiben:

$$j_{\alpha+\beta} = R_\beta (j_\alpha).$$

Dieser Umstand lässt einen interessanten Schluss auf die Gruppe unserer Gleichung zu. Dieselbe ist natürlich erstens eine <u>Abel'sche Gruppe</u>, d.h. eine Gruppe vertauschbarer Operationen. Zweitens aber erkennen wir, dass sie <u>mit der Gruppe der Composition genau parallel läuft (ihr „isomorph" ist)</u>. Der Uebergang von f_α zu $f_{\alpha+\beta}$ wird nämlich in der Gittersprache dadurch bewerkstelligt, dass wir das Gitter G_α mit dem Gitter G_β multipliciren, wobei sich das Gitter $G_{\alpha+\beta}$ ergiebt. Die Multiplication mit G_β hat also auf die Wurzeln f_α der Classengleichung denselben Einfluss, wie die rationale Operation R_β. In beiden Fällen besteht die charakteristische Eigenschaft, dass sich die Indices α und β einfach additiv an einander reihen. Wir kommen also zu dem merkwürdigen Ergebniss:

Die ursprünglich zahlentheoretisch definirte Gruppe der Composition gewinnt bei der Classengleichung eine algebraische Bedeutung.

Um die vorstehenden Behauptungen zu beweisen, haben wir nur die Richtigkeit der Gleichung

$$J_{\alpha+\beta} = R'_{\beta}(J_{\alpha})$$

darzuthun. Ist nämlich gezeigt, daß jede Wurzel in solcher Weise durch eine rationale Operation aus jeder anderen erhalten werden kann, so ergiebt sich die Vertauschbarkeit dieser rationalen Operationen von selbst. In der That wird dann

$$R'_{\gamma}(R_{\beta}(J_{\alpha})) = J_{(\alpha+\beta)+\gamma} = J_{(\alpha+\gamma)+\beta} = R'_{\beta}(R_{\gamma}(J_{\alpha})).$$

Wir stützen uns beim Beweise in erster Linie wieder auf die Transformationsgleichung. Während wir aber bisher solche Transformationsgrade n herangezogen, welche sich im Hauptgitter zerlegen

liessen, benutzen wir jetzt Transformationsgrade, welche in das Produkt zweier im Nebengitter G_β bez. $G_{-\beta}$ befindlicher Zahlen ν und $\bar{\nu}$ zerfallen. Hinsichtlich der Wurzeln unserer Transformationsgleichung ergiebt sich daraus folgende Umänderung der Fragestellung. Wir haben früher nach denjenigen Werthen j' gefragt, welche mit j_α identisch sind, entsprechend der Annahme, dass n in zwei Hauptzahlen zerlegt werden kann und mit Rücksicht darauf, dass bei der Multiplication mit einer Hauptzahl das zu dem Werthe von j_α gehörige Gitter ungeändert bleibt. Wir werden jetzt nach denjenigen Werthen j' fragen, welche nicht direkt gleich j_α, sondern gleich $j_{\alpha\pm\beta}$ sind; da nämlich die Zahlen ν und $\bar{\nu}$ den Nebengittern G_β und $G_{-\beta}$ angehören sollen, wird sich das Gitter G_α bei der complexen Multiplication mit ν und $\bar{\nu}$ je

in ein Gitter verwandeln, welches in das Gitter $G_{\alpha+\beta}$ bez. $G_{\alpha-\beta}$ eingelagert ist, so dass p_α in $p_{\alpha\pm\beta}$ übergeht.

Übrigens werden wir beim Beweise nur Primzahlgrade der Transformation benutzen. Wir sind dadurch einer Reihe von Fallunterscheidungen überhoben, welche bei zusammengesetzten Transformationsgraden die Betrachtung erschweren. Indessen hat diese Beschränkung auch einen Nachtheil. Wir werden nämlich mit unserem Beweise nur dann durchkommen, wenn wir den Satz benutzen, dass in jedem unserer h Gitter Primzahlen π vorkommen. Der Beweis dieses Satzes erfordert höhere Betrachtungen und ist von Weber geliefert worden. Wir müssen hier den Satz als bewiesen übernehmen.*)

*) Dieses ist aber, wie wir wiederholen, nur ein Mittel zur Abkürzung der Darstellung. Wir können auch ohne den Weber'schen Satz durchkommen, indem wir solche zusammengesetzte Transformationsgrade n betrachten, die sich im Gitter G_β, $G_{-\beta}$ zerlegen.

Der Transformationsgrad p soll in unserer Normalfigur die Zerlegung

$$p = \pi . \bar{\pi}$$

gestatten. Die Zahl π gehöre dem von dem Hauptgitter verschiedenen Gitter G_β an, so daß $\beta \neq 0$ ist. Wir können die folgenden drei Fälle unterscheiden:

1.) $\pi = \bar{\pi}$ und $G_\beta = G_{-\beta}$

2.) $\pi \neq \bar{\pi}$ " $G_\beta = G_{-\beta}$

3.) $\pi \neq \bar{\pi}$ " $G_\beta \neq G_{-\beta}$.

In den beiden ersten Fällen ist G_β ein Ancepsgitter u. zw. befindet sich im Falle 1.) der Punkt $(\pi, \bar{\pi})$ auf einer Symmetrielinie des Ancepsgitters, im Falle 2.) in einer beliebigen Ecke desselben. Im dritten Falle ist G_β kein Ancepsgitter.

Betrachten wir nun die zur Zahl p gehörige Transformationsgleichung

$$F_p(J', J) = 0.$$

Unter den $p+1$ Wurzeln J' befinden sich die Werthe $J' = J\alpha + \beta$ und

$J' = J\alpha - \beta$. Es sind dieses nach pg. 230 zugleich die einzigen Werthe von J' welche mit einer Wurzel J der Classengleichung $X_\nabla = 0$ übereinstimmen können. Hieraus ergeben sich für die 3 unterschiedenen Fälle nachstehende Folgerungen.

1.) Im Falle 1.) ist eine Wurzel der Transformationsgleichung bekannt, nämlich

$$J' = J\alpha + \beta = J\alpha - \beta.$$

Dieselbe kann in rationeller Weise als gemeinsame Wurzel der beiden Gleichungen

$$F_p(J', J\alpha) = 0, \; X_\nabla(J') = 0$$

nach der Methode des grössten gemeinsamen Theilers berechnet werden. Wir erhalten

$$J' = J\alpha \pm \beta = R(J\alpha).$$

Die Gestalt der rationellen Function R hängt natürlich in keiner Weise davon ab, welchen der

Werthe $J = J\alpha$ wir in die Transformationsgleichung eingesetzt haben. Der Index α kommt nur in dem Argumente von R zum Ausdrucke. Die Coefficienten von F und also die von R bestimmen sich (ausser durch den Werth der Discriminante $-\nabla$) nur durch die Zahl π, oder wie wir sagen können, durch den Index β desjenigen Gitters, in welchem π liegt. Benutzt man verschiedene π desselben Index β, so wird man allemal auf dasselbe $J\alpha \pm \beta$ geführt, so dass die entstehenden rationalen Functionen $R(J\alpha)$ numerisch übereinstimmen. Wir mögen daher die vorstehende Formel ausführlicher folgendermassen schreiben:

$$// \; J_{\alpha \pm \beta} = R^{\prime}_{\beta}(J\alpha).$$

2.) Im Falle 2.) giebt es zwei verschiedene Transformationen p^{ter} Ordnung, welche auf denselben

ben Werth

$$y' = y_\alpha \pm \beta$$

führen. In Folge dessen hat die Gleichung $F(y', y_\alpha) = 0$ jetzt eine Doppelwurzel. Diese kann direkt aus der Gleichung $F = 0$ oder (falls es ausser dieser noch andere Doppelwurzeln geben sollte) mit Hinzuziehung der Gleichung $X_\nabla(y') = 0$, in rationaler Form als Function von y_α berechnet werden.

Der Werth dieser Function hängt nur von dem Index β ab. Wir haben also auch in diesem Falle

$$y_{\alpha \pm \beta} = R_\beta(y_\alpha).$$

In den bisher betrachteten Fällen 1.) und 2.) haben wir keinen Grund gehabt, den natürlichen Rationalitätsbereich zu erweitern. Die Coefficienten von R ergeben sich als gewöhnliche ganze Zahlen.

3.) Wir kommen nun zu dem

allgemeinen Falle 3.). Hier existiren zwei verschiedene Wurzeln

$$J' = J_{\alpha+\beta} \text{ und } J' = J_{\alpha-\beta},$$

welche den beiden Gleichungen

$$F(J', J_\alpha) = 0 \text{ und } X_\nabla(J') = 0$$

gemeinsam sind. Das Euklidische Verfahren liefert hier zur Bestimmung von $J_{\alpha+\beta}$ und $J_{\alpha-\beta}$ eine quadratische Gleichung. Hier sind also nicht $J_{\alpha+\beta}$ und $J_{\alpha-\beta}$ selbst, sondern nur die symmetrischen Functionen dieser Grössen rational bekannt. Wir haben etwa:

$$J_{\alpha+\beta} + J_{\alpha-\beta} = R'_\beta(J_\alpha)$$
$$J_{\alpha+\beta} \cdot J_{\alpha-\beta} = R''_\beta(J_\alpha).$$

Die Coefficienten der Functionen R' und R'' hängen nur von β ab und sind gewöhnliche ganze Zahlen. Die vorstehenden Gleichungen mögen wir etwas um-

bestimmter folgendermassen schreiben:

$$J_{\alpha+\beta} = R^{\iota}_{\beta}\,(J_{\alpha}, J_{\alpha-\beta}).$$

Wie man sieht, führt die Transformationsgleichung in diesem allgemeinen Falle nicht völlig zum Ziele. Wir müssen daher zu neuen Hülfsmitteln unsere Zuflucht nehmen. Diese liefert uns die Multiplicatorgleichung:

$$\Phi(M, J) = 0, \text{ wo } M = p\sqrt[12]{\frac{\Delta'}{\Delta}}.$$

Zunächst ändern wir dieselbe ein wenig ab. Wie pg. 66 erwähnt, sind ihre Coefficienten nicht immer im natürlichen Rationalitätsbereiche enthalten. Stellen wir aber eine entsprechende Gleichung für

$$M^{12} = p^{12}\,\frac{\Delta'}{\Delta}$$

auf, so erhalten wir eine Gleichung

$$\Psi(M^{12}, J) = 0,$$

deren Coefficienten unter allen Umständen rationale ganze Zahlen sind.
Andererseits lässt sich H^{12} rational und ganzzahlig durch die entsprechenden Werthe von J und J' ausdrücken (wenigstens, solange J' nicht Doppelwurzel der Gleichung $F(J', J) = 0$ ist, wie hier nicht näher ausgeführt werden soll.) In dem uns interessirenden Falle 3.) können wir also jedenfalls setzen:

$$H^{12}_{\alpha+\beta} = Rat(J_{\alpha+\beta}, J_\alpha)$$

$$H^{12}_{\alpha-\beta} = Rat(J_{\alpha-\beta}, J_\alpha).$$

denn die Wurzeln $J_{\alpha+\beta}$, $J_{\alpha-\beta}$ sind im vorliegenden Falle nach pg. 230 einfache Wurzeln der Transformationsgleichung.
Hiermit ist allerdings zunächst noch nichts gewonnen; denn die Indices $+\beta$ und $-\beta$ erscheinen hier wieder gleichberechtigt neben

einander. Wir können aber nach pg. 232 noch eine zweite Darstellung für die Grössen $\mathcal{H}_{\alpha+\beta}$ und $\mathcal{H}_{\alpha-\beta}$ geben, nämlich

$$\mathcal{H}^{12}_{\alpha+\beta} = \pi^{12}\,\frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_\alpha},$$

$$\mathcal{H}^{12}_{\alpha-\beta} = \pi^{12}\,\frac{\Delta_{\alpha-\beta}}{\Delta_\alpha}.$$

Indem diese Gleichungen sich durch die Factoren π^{12} bez. $\bar{\pi}^{12}$ unterscheiden, geben sie uns ein Mittel den Index $+\beta$ von dem Index $-\beta$ zu trennen.

24.VI.96. Dies wird folgendermassen bewerkstelligt werden. Wir schreiben die vorstehenden Gleichungen:

$$1.)\quad \bar{\pi}^{12}\,\frac{\Delta_{\alpha+\beta}}{\Delta_\alpha} = \mathcal{R}_1(j_{\alpha+\beta}, j_\alpha).$$

Hier vertauschen wir α mit $\alpha+\beta$, worauf die rechte Seite übergeht in $\mathcal{R}_1(j_{\alpha+2\beta}, j_{\alpha+\beta})$. Nach einer Bemerkung von pg. 298 aber wird

nun

$$j_{\alpha+2\beta} = R_\beta(j_{\alpha+\beta}, j_\alpha),$$

so daß der Ausdruck $R'(j_{\alpha+2\beta}, j_{\alpha+\beta})$ geschrieben werden kann als eine rationale Function von $j_{\alpha+\beta}$ und j_α.

Wir können also die folgende Gleichung anschreiben:

$$2.)\ \pi^{12}\frac{\Delta_{\alpha+2\beta}}{\Delta_{\alpha+\beta}} = R'_2(j_{\alpha+\beta}, j_\alpha).$$

In derselben Weise gewinnen wir aus 2)

$$3.)\ \pi^{12}\frac{\Delta_{\alpha+3\beta}}{\Delta_{\alpha+2\beta}} = R'_3(j_{\alpha+\beta}, j_\alpha)\ \text{etc.}$$

Wir erhalten so eine Kette von Gleichungen. Nach der Compositionstheorie muß sich dieselbe schliessen. Ist nämlich k der Exponent, welcher zu dem Gitter G_β gehört (vergl. pg 146), so haben wir

$$j_{\alpha+k\beta} = j_\alpha, \quad \Delta_{\alpha+k\beta} = \Delta_\alpha.$$

In Folge dessen lautet die letzte unserer Gleichungen

$$k)\ \pi^{12}\frac{\Delta_\alpha}{\Delta_{\alpha+(k-1)\beta}} = R'_k(J_{\alpha+\beta}, J_\alpha).$$

Durch Multiplication der Gleichungen 1.) 2.) . . . k) ergiebt sich

$$a)\ \pi^{12k} = R'_1 . R'_2 \ldots R'_k(J_{\alpha+\beta}, J_\alpha).$$

In derselben Weise findet man

$$b)\ \pi^{12k} = R'_1 . R'_2 \ldots R'_k(J_{\alpha-\beta}, J_\alpha).$$

Die beiden Gleichungen a) und b) halten wir nun mit der quadratischen Gleichung zusammen, welche zwischen $J_{\alpha+\beta}$ und $J_{\alpha-\beta}$ besteht.

Dieselbe hat mit a) die eine, mit b) die andere Wurzel gemein. Bestimmen wir also den grössten gemeinsamen Theiler zwischen dieser Gleichung und a) bez. b), so erhalten wir $J_{\alpha+\beta}$ bez. $J_{\alpha-\beta}$ als rationale Function von J_α. Die Coefficienten dieser Function sind

von dem Index α unabhängig, da dieses sowohl für die quadratische Gleichung als für die Functionen $R'_1, R'_2 \dots R'_k$ gilt. Wir können also wiederum schreiben

$$J_{\alpha+\beta} = R'_\beta(J_\alpha) \text{ bez. } J_{\alpha-\beta} = R'_{-\beta}(J_\alpha).$$

Die Coefficienten sind aber nicht mehr, wie früher ganze Zahlen. Vielmehr gehen in dieselben die Irrationalitäten $\bar{\pi}^{\,nk}$ bez. $\pi^{\,nk}$ ein. Da k der zum Gitter G_β gehörige Exponent ist, so werden $\bar{\pi}^{\,k}$ und $\pi^{\,k}$ Hauptzahlen. Dasselbe gilt von den Coefficienten von R_β und $R_{-\beta}$. Diese sind ganze Zahlen nicht im natürlichen sondern in dem durch $V-\nabla$ erweiterten Rationalitätsbereiche.

Hiermit ist der pag. 288 begonnene Beweis für alle Fälle erbracht. Wir haben gesehen, dass die Formel

$$J_{\alpha+\beta} = R'_\beta(J_\alpha)$$

allemal statthat, wenn es eine Primzahl p giebt, welche in dem

Gitter G_β zerlegbar ist. Nehmen wir schliesslich noch den pg. 292 erwähnten Satz von Weber hinzu, so sind wir sicher, dass zu jedem Index β eine Primzahl p gefunden werden kann, welche sich in dem Gitter G_β zerlegt. Die gefundene Darstellung von $J\alpha+\beta$ lässt sich hiernach für alle möglichen Werthe von β realisiren.

Mithin gilt in der That der Satz:

Die Classengleichung ist eine Abel'sche Gleichung in dem durch $\sqrt{-\nabla}$ erweiterten Rationalitätsbereiche. (sie ist, wie man sagen kann, eine *Relativ-Abel'sche Gleichung*, im Gegensatz zu einer *absolut-Abel'schen Gleichung*, bei welcher die Coefficienten der rationalen Function $R''\beta$ dem natürlichen Rationalitätsbereiche angehören würden). Und ferner:

Ihre Gruppe ist mit der Gruppe der Gittercomposition direkt

<u>isomorph.</u>

Eine unmittelbare Folge unseres Satzes ist diese:

<u>Die Classengleichung ist,</u> (wie jede Abel'sche Gleichung) <u>durch Wurzelzeichen lösbar.</u>

Der letztgenannte Satz ist bereits von Abel selbst ausgesprochen. Wir müssen daraus schliessen, dass er auch die vorhergehenden Entwickelungen, wenn auch in anderer Form, gekannt hat, oder doch deren Möglichkeit im raschen Vorausblick eingesehen hat.

Mit den angegebenen wichtigen Resultaten ist aber die Theorie der singulären elliptischen Gebilde nicht abgeschlossen. Es ist das Verdienst von <u>Kronecker</u>, der als erster den Abel'schen Satz bewiesen hat, diese Theorie noch weiter geführt zu haben.

<u>Kronecker zeigt vor allen Dingen, dass die Classengleichung eine irreducible Gleichung ist,</u> dass

sie also einen in sich abgeschlossenen, nicht weiter zerlegbaren Rationalitätsbereich, den sog. <u>Classen-Körper</u> definirt.

Der Beweis dieser Thatsache setzt weitgehende Hülfsmittel voraus, nämlich die allgemeine Idealtheorie der algebraischen Zahlen, welche gleichfalls von Kronecker u. zw. gerade zu dem genannten Zwecke entwickelt worden ist.

Wir verweisen dieserhalb auf <u>Weber</u> §. 110.

Wir wollen an dieser Stelle von der <u>allgemeinen Idealtheorie</u> eine wenn auch nur flüchtige Beschreibung im Sinne dieser Vorlesung geben.

Gegeben sei die irreducible ganzzahlige Gleichung $\chi_n\ (x) = 0$ mit den Wurzeln $\xi, \eta, \zeta, \ldots$; Jede dieser Wurzeln definirt einen Körper, bestehend aus denjenigen ganzzahligen rationalen Functionen dieser Grössen, welche

ganze algebraische Zahlen sind. Wir verstehen jetzt unter $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ einen Complex so erhaltener zusammengehöriger ganzer Zahlen.

Zur geometrischen Interpretation kommen wir, wenn wir den Complex der Zahlen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$ durch einen Punkt des n-dimensionalen Raumes repräsentiren. Suchen wir alle Punkte des Raumes auf, welche zu Coordinaten bez. Zahlen des Körpers ξ, des Körpers η, etc besitzen, so bilden diese ein Gitter im n-dimensionalen Raume. Es ergiebt sich dieses daraus, dass die so entstehende Gesammtheit von Punkten die Eigenschaft haben muss, sich bei Addition der Coordinaten zu reproduciren. In unserem Bilde berücksichtigen wir hiernach immer gleichzeitig n Zahlen $\xi, \eta, \zeta, \ldots$, während man in der Körpertheorie nur je von einer dieser Grössen redet. Wir haben zunächst zu defi-

niren, was es heissen soll, zwei Punkte dieser Gitter zu multipliciren. Unsere Definition soll durch die Formel festgelegt sein.

$$(\xi, \eta, \zeta, \dots) \cdot (\xi', \eta', \zeta', \dots) = (\xi\xi', \eta\eta', \zeta\zeta', \dots).$$

Sodann haben wir von der Operation der Division zu sprechen und überhaupt von den Teilbarkeitsgesetzen. In Bezug hierauf gilt nun ganz dasselbe, was bei den ebenen Gittern ausgeführt wurde. Um das Theorem aufrecht zu halten, dass jeder Punkt sich (von Einheiten abgesehen) auf eindeutige Weise in Primpunkte zerlegen lässt, muss man neben das Hauptgitter eine endliche Anzahl von Nebengittern stellen und deren Punkte als sog. „ideale Punkte" neben den Punkten des Hauptgit-

ters, den „wirklichen Punkten"
in die Betrachtung einbeziehen.
Ich kann diesbezüglich auf die
Furtwängler'sche Dissertation *) ver-
weisen, wo der Fall $n = 3$ durch-
geführt wird.

Auf Grund dieser allgemeinen
Idealtheorie ist es nun Kronecker
gelungen, die Irreducibilität der
Classengleichung und damit die
Existenz des Classenkörpers dar-
zuthun. Von den Zahlen dieses Kör-
pers kennen wir bisher die Invari-
anten j und die Multiplicatoren
M^{12}. Weiterhin wird man na-
mentlich nach den Einheiten des
Körpers, den Primzahlen etc. fra-
gen. Diese Dinge werden behan-
delt von Weber, Ellipt. Fu. § 110
und 111.

Wir müssen uns hier auf die
folgende Bemerkung beschränken.

*) Furtwängler, Zur Theorie der in
Linearfactoren zerlegbaren, ganzzahli-
gen ternären cubischen Formen. Göttingen
1896.

Sei der Einfachheit wegen $p \equiv 1$ (mod 12); dann ist nicht nur $\mathcal{M}^{12}$, sondern $\mathcal{M}$ selbst durch $j\alpha+\beta$ und $j\alpha$ rational ausdrückbar, d.h. eine Zahl des Classenkörpers. Für $\mathcal{M}$ hatten wir die Formel

$$\mathcal{M} = \pi \sqrt[12]{\frac{\Delta \alpha+\beta}{\Delta \alpha}};$$

die in derselben Weise mit dem Index $-\beta$ gebildete Zahl ist

$$\mathcal{M} = \pi \sqrt[12]{\frac{\Delta \alpha-\beta}{\Delta \alpha}}$$

Solcher Zahlen $\mathcal{M}$ erhalten wir eine ganze Reihe, dadurch dass wir den Index α alle möglichen Werthe durchlaufen lassen.

Wir wollen die beiden vorstehenden Zahlen mit einander multipliciren, nachdem wir in der zweiten α durch $\alpha+\beta$ ersetzt haben. Dann ergiebt sich

$$\bar{\pi}\sqrt[12]{\frac{\Delta\alpha+\beta}{\Delta\alpha}}\quad \pi\sqrt[12]{\frac{\Delta\alpha}{\Delta\alpha+\beta}} = \bar{\pi}\pi = p.$$

Um den Sinn dieser Gleichung gehörig zu würdigen, müssen wir uns auf den Standpunkt derjenigen Arithmetiker stellen, welche nur die Zahlen des Hauptgitters als „wirkliche" Zahlen gelten lassen. Dann werden wir sagen können:

Die Primzahl p, welche sich im quadratischen Körper nur in die idealen Factoren π und $\bar{\pi}$ spalten lässt, wird hier, im Classenkörper, in die wirklichen Factoren

$$\bar{\pi}\sqrt[12]{\frac{\Delta\alpha+\beta}{\Delta\alpha}}\quad \text{bez.}\quad \pi\sqrt[12]{\frac{\Delta\alpha}{\Delta\alpha+\beta}}$$

zerlegt. Der Classenkörper leistet also hinsichtlich der Spaltung der Primzahl p dasselbe, wie die Hinzunahme der Nebengitter zu dem Hauptgitter der Ebene.

Man kann sich die Frage vorlegen, welche von diesen beiden

Methoden zur „Realisirung der idealen Zahlen" vor der anderen den Vorzug verdient. Ohne Zweifel ist die Hinzunahme der Nebengitter viel *elementarer* als der Uebergang zu dem Classenkörper. Dafür bietet aber der letztere in *algebraischer Hinsicht* gewisse Vortheile dar. *Er ist nämlich relativ zu dem quadratischen Körper wie wir sehen, direct ein Abel'scher Körper*. Etwas anders stellt sich das algebraische Verhältniß der Nebengitter zu dem Hauptgitter. Die Nebengitter haben wir so construirt, daß wir aus gewissen Zahlen des Hauptgitters die k^{te}, k_1^{te}, k_2^{te} ... Wurzel zogen. Die Nebenzahlen sind also mit den Hauptzahlen durch die Gleichung verknüpft

$$X^k = H \,,$$

wo H eine ganze Zahl des Körpers $\sqrt{-\nabla}$ bedeutet. Diese Glei-

chung ist nicht direkt eine Abel'sche Gleichung. Die Wurzeln derselben $x_1, x_2, \ldots x_k$ sind allerdings rational durch einander auszudrücken, aber nur nach Adjunction der k^{ten} Einheitswurzeln. Wir können hiernach sagen: Die sämmtlichen Ecken unserer Normalfigur gehören gleichfalls einem Körper an, welcher relativ Abel'sch ist. Bei der Aufstellung dieses Körpers wird aber nicht nur $\sqrt{-\nabla}$, sondern auch $e^{\frac{2\pi i}{k}}, e^{\frac{2\pi i}{k_1}}, e^{\frac{2\pi i}{k_2}}, \ldots\ldots$ oder, wie wir zusammenfassend sagen können $\sqrt{-\nabla}$ und $e^{\frac{2\pi i}{k}}$ unter die rational bekannten Grössen gerechnet. Geometrisch kommt das Hereinspielen der h^{ten} Einheitswurzeln darin zum Ausdruck, daß wir unsere Normalfigur auf h Weisen zeichnen konnten. Die Normalfigur ist h-deutig bestimmt. Umgekehrt ist der Classenkörper eindeutig definirt.

Wir bemerken noch, daß die Primzahl p nach unserer obigen Formel

$$p = \bar{\pi} \sqrt[n]{\frac{\Delta\alpha+\beta}{\Delta\alpha}} \cdot \pi \sqrt[n]{\frac{\Delta\alpha}{\Delta\alpha+\beta}}$$

scheinbar sehr verschiedene Zerlegungen in unserem Classenkörper gestattet, da wir den Index α hier beliebig variiren können. Diese Behauptung scheint dem Gesetze der eindeutigen Factorenzerlegung zu widersprechen. Sie findet aber dadurch ihre Erklärung, daß sich die einzelnen Factoren nur durch Einheiten unterscheiden. Es gilt nämlich der Satz:

Alle Ausdrücke

$$\sqrt[12]{\frac{\Delta\alpha+\beta}{\Delta\alpha}\,\frac{\Delta\alpha'}{\Delta\alpha'+\beta}}$$

sind Einheiten des Classenkörpers.

Unter ihnen sind als reell diejenigen ausgezeichnet, für welche $\alpha = -\beta$

und $\alpha' = 0$ ist; die reellen Einheiten sind also durch den Ausdruck gegeben

$$\sqrt[12]{\frac{\Delta_0^2}{\Delta_\alpha \Delta_{-\alpha}}}$$

Leider ist es unmöglich, dass wir hier diese interessanten Fragen weiter verfolgen. Man gebraucht zu ihrer Behandlung zweckmässigerweise die Kronecker'sche Gränzformel, die wir gerade mit Rücksicht hierauf früher mitgetheilt hatten.

Den Rest der Vorlesung werden wir uns damit beschäftigen, analoge Untersuchungen für die Moduln höherer Stufe aufzustellen. Ansätze hierzu liegen bereits in der Litteratur vor. So behandelt Weber den Modul 3ter Stufe $\sqrt[3]{J}$ und den Modul 48ter Stufe $f = \sqrt[24]{k^2 k'^2}$, welche bez. der 1ten oder 2ten Stufe adjungirt sind.

Unsere Aufgabe soll es insbesondere sein, den Modul 5ter Stufe ζ

zu besprechen. Wir werden die Betrachtung allerdings nicht vollkommen durchführen können, sondern müssen uns begnügen, einen genauen Plan für dieselbe zu entwerfen. Die erforderlichen Schritte wollen wir der Reihe nach aufzählen.

1. Vor allem werden wir uns zunächst damit beschäftigen, die Transformation n^{ter} Ordnung von $\zeta(\omega)$ zu studiren. Dabei setzen wir, um Complicationen zu vermeiden, ein für allemal voraus, dass n nicht durch 5 theilbar sei.

Ähnlich wie zwischen der Invariante J und dem transformirten J' eine algebraische Gleichung $F(J', J) = 0$ vom Grade $\psi(n)$ besteht, so bestehen auch zwischen ζ und dem transformirten Werthe ζ' Transformationsgleichungen vom Grade $\psi(n)$ (vergl. pag. 81). Der Unterschied ist nur der, dass wir hier immer 60 solcher Transformationsgleichungen neben einander zu betrachten haben. Diese 60 Gl. un-

terscheiden wir in eine Hauptgleichung und 59 Nebengleichungen: Wir vervollständigen die früheren Angaben hierüber folgendermassen.

a. Die Hauptgleichung $f(\varphi', \varphi) = 0$ liefert alle diejenigen transformirten $\varphi' = \varphi\left(\frac{a\omega + b}{c\omega + d}\right)$, $ad - bc = n$, für welche die Transformationscoefficienten a, b, c, d den Congruenzbedingungen:

$$\left.\begin{array}{ll} a \equiv \pm 1 & b \equiv 0 \\ c \equiv 0 & d \equiv \pm n \end{array}\right\} \pmod 5$$

genügen. Die Coefficienten der Hauptgleichung sind rationale Zahlen des natürlichen Rationalitätsbereichs.

b. Die Nebengleichungen entstehen aus der Hauptgleichung dadurch, daß wir auf ζ oder auf ζ' beliebige Ikosaedersubstitutionen ausüben. Zunächst scheint es so, als ob auf diese Weise im Ganzen 60×60 Gleichungen entständen. Dies ist aber nicht der Fall, weil immer 60 von den sämmtlichen Gleichungen untereinander

identisch werden. Wir erwähnten in dieser Hinsicht bereits pag 87, dass die Gleichung $f(\xi', \xi) = 0$ in sich übergeht, wenn wir auf φ' eine beliebige Ikosaedersubstitution und auf φ eine in dem Sinne zugeordnete Substitution ausüben, dass wir ε in ε^n verwandeln. So kommt es, dass von den 60×60 Gleichungen immer 60 identisch werden. Die übrig bleibenden 60 Gleichungen können wir in der Form ausschreiben:

$$f(S(\xi'), \xi) = 0,$$

unter S eine beliebige Ikosaedersubstitution verstanden. Bedeutet S die Identität, so haben wir die Hauptgleichung, bedeutet S eine beliebige andere Ikosaedersubstitution, so ergiebt sich je eine der Nebengleichungen.

c. Es ist klar, dass die Coefficienten der (nach ξ und ξ' geordneten) Nebengleichungen im Allgemeinen nicht dem natürlichen Rationalitätsbe-

reich angehören können. Da nämlich durch die Substitution S die 5te Einheitswurzel ε eingeführt wird, so werden die Coefficienten im allgemeinen dem durch ε erweiterten Rationalitätsbereich angehören. Es ist aber auch möglich, daß von den Nebengleichungen einige im natürlichen, einige in dem Rationalitätsbereiche $\varepsilon+\varepsilon^4$ (welcher mit dem Rationalitätsbereiche $\sqrt{5}$ identisch ist) rational sind. Die Entscheidung hierüber muß der Specialuntersuchung vorbehalten bleiben.

2. Wir wollen die Nebengleichungen noch in ähnlicher Weise durch Bedingungen für die Transformationscoefficienten a, b, c, d charakterisiren, wie dieses für die Hauptgleichung bereits oben geschehen ist. Zu dem Zwecke wollen wir die sämmtlichen Transformationen:

$$\omega' = \frac{a\omega + b}{c\omega + d}\ , \quad ad - bc = n$$

in gewisser Weise in Classen zusammenfassen. Wir verstehen unter a_0, b_0, c_0, d_0 eine Lösung der Congruenz:

$$a_0 d_0 - b_0 c_0 \equiv n \pmod 5.$$

Diese Congruenz besitzt 60 verschiedene mod 5 incongruente Lösungen (sofern wir von einem gleichzeitigen Vorzeichenwechsel der 4 Grössen a_0, b_0, c_0, d_0 absehen). Wir fassen nun alle diejenigen Transformationen (a, b, c, d) zusammen, welche demselben Werthsystem (a_0, b_0, c_0, d_0) mod 5 congruent sind, so dass

$$\left.\begin{array}{ll} a \equiv \pm a_0 & b \equiv \pm b_0 \\ c \equiv \pm c_0 & d \equiv \pm d_0 \end{array}\right\} \pmod 5.$$

Es zeigt sich, dass alle in diesem Sinne zusammengehörigen Transformationen aus ξ alle diejenigen Werthe ξ' entstehen lassen, welche mit ξ durch eine unserer 60 Transformationsgleichungen zusammenhängen. Die letzteren werden wir daher passend durch Beifügung

des Schemas $\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}$ unterscheiden und allgemein in der Form schreiben:

$$f\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}(\varphi', \varphi) = 0$$

Die Hauptgleichung wird in dieser Bezeichnung durch das Schema $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & n \end{vmatrix}$ charakterisirt.

Uebrigens betonen wir nochmals, dass wir immer nur „eigentliche" Transformationen im Auge haben, also ausschliessen, dass die a, b, c, d einen Factor gemein haben.

3. Es gilt nun vor allen Dingen, die Gesammtheit dieser 60 Transformationsgleichungen dadurch übersichtlicher zu machen, dass wir sie in <u>Kategorieen gleichberechtigter Gleichungen</u> zusammenfassen. Wir erwähnten bereits, dass wir zwei Transformationsgleichungen gleichberechtigt nennen, wenn sie auseinander hervorgehen, indem man auf ζ' und ζ dieselbe Ikosaedersubstitution (cogrediente Ikosaedersubstitutionen)

ausübt. Die folgenden Entwickelungen werden zeigen, dass 2 gleichberechtigte Gleichungen auch immer gleichwertig sind, so dass es genügt, aus jeder Kategorie immer nur eine Gleichung zu betrachten. Man wird allgemein zu reden diejenige wählen, welche die einfachsten Zahlencoefficienten darbietet.

4. Jede unserer 60 Transformationsgleichungen geht wie wir sagten, bei 60 simultanen Substitutionen von ξ und ξ' in sich über. Die Substitutionen sind aber im allgemeinen durchaus nicht „congruent" oder „cogredient", d. h. für ξ und ξ' gleichlautend. Indessen kann ein Theil der 60 Substitutionen cogredient sein. Wir wollen die Anzahl dieser cogredienten Substitutionen mit *Gierster* als das „*Gewicht*" der Gleichung bezeichnen. Jeder Transformationsgleichung kommt auf diese Weise eine gewisse Gewichtszahl g zu.

Diese Gewichtszahl g steht in

engster Beziehung zu der eben postulirten Eintheilung unserer Gleichungen in Kategorieen gleichberechtigter Gleichungen. Ersichtlich ist nämlich die Anzahl der Gleichungen, welche mit einer gegebenen Gleichung gleichberechtigt sind, $\frac{60}{g}$.

5. Zur Bestimmung des Gewichtes dient die folgende Congruenz:

$$\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \equiv \pm \begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} \quad (\text{mod}. 5)$$

mit $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$.

In dieser Congruenz sind $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ die Unbekannten. Die Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$ geben direct diejenigen Ikosaedersubstitutionen von ζ, welche mit den zugehörigen Ikosaedersubstitutionen identisch sind. Die Anzahl der mod 5 unterschiedenen unimodularen Substitutionen $\frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$, welche der obigen Congruenz genügen, liefert direct die Gewichtszahl g.

6. Die Spezialdiscussion dieser

Congruenzen ergiebt für g die folgenden Tabellen:

$n \equiv 1 \pmod 5$

Bezeichnung der Schemata	Anzahl der Schemata	Gewicht g
$\pm \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	1	60
Andere Schemata mit $a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	24	5
$a_0 + d_0 \equiv 0$	15	4
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	20	3

$n \equiv 4 \pmod 5$

Schemata	Anzahl	g
$\pm \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$	1	60
Andere Schemata mit $a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	24	5
$a_0 + d_0 \equiv 0$	15	4
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	20	3

$n \equiv 2 \pmod{5}$

Schemata	Anzahl	g
$a_0 + d_0 \equiv 0$	10	6
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	20	3
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	30	2

$n \equiv 3 \pmod{5}$

Schemata	Anzahl	g
$a_0 + d_0 \equiv 0$	10	6
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	20	3
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	30	2

Hier bedeutet immer die erste Colonne eine modulo 5 zu verstehende Congruenzbedingung für die Zahlen des Schemas, die zweite Colonne giebt an, für wieviele Schemata die

betr. Bedingung erfüllt ist; die letzte Colonne zeigt das zugehörige Gewicht an.

Wie man sieht, liefern die Transformationsgrade $n \equiv 1, 4 \pmod{5}$ und die Grade $n \equiv 2, 3 \pmod{5}$ je unter sich analoge Resultate.

7. Aus den vorstehenden Tabellen können wir noch folgendes schliessen:

Bei $n \equiv 2, 3 \pmod{5}$ sind jedesmal diejenigen Schemata gleichberechtigt, welche dieselbe Summe $\pm(a_0 + d_0)$ darbieten.

Denn greifen wir z. B. bei $n \equiv 2$ ein beliebiges Schema mit $(a_0 + d_0) \equiv \pm 1$ heraus. Dasselbe hat das Gewicht 3, infolgedessen giebt es noch $\frac{60}{3} = 20$ gleichberechtigte Schemata; diese müssen natürlich sämmtlich dasselbe Gewicht wie das ursprüngliche Schema, also das Gewicht 3, haben. Infolgedessen müssen es die 20 Schemata sein, für die $(a_0 + d_0) \equiv \pm 1$ ist, denn diese allein

besitzen das Gewicht 3.

Das Gleiche wie bei $n \equiv 2, 3$ gilt auch bei $n \equiv 1 \pmod{5}$ für $(a_0 + d_0) \equiv 0, \pm 1$, ebenso bei $n \equiv 4$ für $(a_0 + d_0) \equiv 0, \pm 2$.

Dagegen zerfallen bei $n \equiv 1$ die Schemata mit $(a_0 + d_0) \equiv \pm 2$ und bei $n \equiv 4$ die Schemata mit $(a_0 + d_0) \equiv \pm 1$ in drei getrennte Kategorien gleichberechtigter. Es giebt jedesmal ein für sich stehendes Schema vom Gewicht 60. Aber auch die übrig bleibenden 24 Schemata vom Gewicht 5 können noch nicht in eine Kategorie gehören, denn zum Gewicht 5 gehören jedesmal nur 12 gleichberechtigte Schemata. Es müssen deshalb die genannten 24 Schemata sich noch in 2 Kategorien von je 12 gleichberechtigten Schematen zerlegen. Diese 2 Kategorien werden später noch näher characterisirt werden.

8. Bevor wir dazu übergehen, die einzelne Gleichung $f\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}(\xi, \zeta)$ in ganz analoger Weise

zu behandeln wie die Gleichung $f(J, J)$, müssen wir vorher noch eine Betrachtung einschieben, welche für die Constitution der eben genannten Gleichung von Wichtigkeit ist.

Die Zahl g bezeichnet nach ihrer Entstehung je eine Untergruppe der Ikosaedergruppe, nämlich die Gruppe derjenigen Ikosaedersubstitutionen, welche auf ζ und ζ' angewandt je eine Transformationsgleichung von ζ in sich überführen. Durch eine solche Untergruppe werden die Punkte der ζ-Kugel allgemein zu reden zu g zusammengeordnet. Diese g Punkte werden im allgemeinen verschieden von einander sein; sie können nur dann ganz oder zum Theil zusammenfallen, wenn es sich um die Ecken des Ikosaeders, oder die Mitten seiner Seitenflächen, oder seine Kantenhalbirungspunkte handelt, da nur diese

als Fixpunkte der Ikosaedersubstitutionen auftreten.

9. Jetzt können wir in mannigfacher Weise eine rationale Function 9ten Grades r_g von φ bilden, welche bei den Substitutionen unserer Untergruppe ungeändert bleibt. Dies r_g kann immer so ausgesucht werden — und dies werden wir im Folgenden voraussetzen — dass es in seinen Coefficienten keine andere Irrationalität enthält als ε.

So können wir z. B. für die cyclische Untergruppe G_5, die durch die Substitution

$$\varphi' = \varepsilon \varphi$$

begründet wird, als einfachstes r_5 wählen:

$$r_5 = c\,\varphi^5,$$

wo c eine beliebige Constante bedeutet. Wollen wir an der angegebenen Beschränkung festhalten, so dürfen wir c nicht ganz beliebig wählen, sondern müssen es als rationale Function von ε ansetzen.

Über die zu den Untergruppen gleichberechtigter Gleichungen gehörigen r_g wollen wir noch eine besondere Verabredung treffen. Bekanntlich gehen in einer Categorie gleichberechtigter Gleichungen aus einer von ihnen die übrigen hervor, indem man auf die erstere gewisse Ikosaedersubstitutionen anwendet. Dementsprechend werden wir bei einer Categorie gleichberechtigter Gleichungen für eine das r_g beliebig – allgemein zu reden möglichst einfach – wählen. Für die übrigen Gleichungen bestimmen wir dann die r_g so, dass wir auf das gewählte r_g diejenigen Ikosaedersubstitutionen anwenden, durch welche die betreffenden Gleichungen aus der zuerst gewählten hervorgehen.

Die Gleichung r_g = Const. liefert uns nun, je nach dem Werthe der rechten Hand stehenden Constanten, die Gruppen

von jedesmal g zusammengehörigen Punkten der Kugel; sie hat also nur dann möglicher Weise vielfache Wurzeln, wenn es sich um die vorhin bezeichneten besonderen Punkte handelt.

Alle anderen rationalen Functionen von ζ, welche bei unserer Untergruppe ungeändert bleiben, – insbesondere die rationale Funktion 60ten Grades J – sind rationale Functionen von r_g.

Ist $g = 60$, so nehmen wir einfach $r_{60} = J$.

10. Wir setzen jetzt in einer unserer Gleichungen $\zeta' = \zeta$ und fragen nach den Wurzeln der so entstehenden Gleichung $f\begin{pmatrix} \alpha, \beta \\ \gamma, \delta \end{pmatrix}(\varphi, \varphi)$

Ein Theil dieser Wurzeln kann in die Ikosaederecken fallen; es sind dieses solche Werthe von ζ, denen der Werth $J = \infty$, d.h. ein reelles ω entspricht. Die Multiplicität dieser Wurzeln muss

durch Reihenentwickelungen von φ nach der Grösse $r = e^{2i\pi\omega}$ entschieden werden. Da uns diese Wurzeln später stören würden, wollen wir die entsprechenden Linearfactoren aus der Gleichung $f(\tau, \varphi) = 0$ fortgehoben denken, was (innerhalb des Bereiches $\mathcal{E}$) rational möglich ist.

Ebenso können eine Anzahl Wurzeln in die Seiten mitten oder Kantenmitten des Ikosaeders fallen, denen solche Werthe ω entsprechen, die mit i oder ϱ aequivalent sind. Diese können wir ebenfalls (innerhalb des Bereiches $\mathcal{E}$) rational abtrennen, was wir als geschehen annehmen.

Die übrigbleibende Gleichung bezeichnen wir als „gereinigte" Transformationsgleichung und schliessen sie zwecks äusserer Kennzeichnung in eckige Klammern ein:

$$\left[f \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} (\tau, \varphi) \right] = 0.$$

Von ihren Wurzeln gehören jedesmal g vermöge der zugehörigen Untergruppe zusammen, und diese g Wurzeln sind unter sich alle verschieden. Hieraus schliessen wir, dass unsere Gleichung in Wirklichkeit eine solche für r_g ist, die wir so schreiben:

$$\Psi_{\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}}(r_g) = 0.$$

Die Coefficienten von Ψ sind jedenfalls nach Adjunction von ε rational, und im übrigen zerfallen natürlich die Gleichungen Ψ genau so in Kategorieen gleichberechtigter wie die Gleichungen f.

Bei den Gleichungen Ψ erkennen wir nun sehr deutlich, dass gleichberechtigte Gleichungen auch wirklich gleichwertig sind. Nach der Verabredung, die wir über die r_g getroffen haben, unterscheiden sich nämlich die gleichberechtig-

ten Ψ nur durch ihr νg, fallen im übrigen aber vollständig zusammen.

11. Die Wurzeln der Gleichung $\Psi = 0$ lassen sich nun in übersichtlicher Weise durch die zugehörigen Werthe von ω bezeichnen.

Zunächst gehören natürlich zu jedem Werthe φ unendlich viele Punkte ω, aber von diesen unendlich vielen brauchen wir nur die reducirten ω, d.h. die innerhalb des aus 60 Elementarbereichen der ω-Ebene zur Hauptcongruenzgruppe 5ter Stufe gehörigen Ikosaederpolygons liegenden zu berücksichtigen.

Da wir ferner die besonderen Werthe φ, welche den Ikosaederecken etc. entsprechen, bereits entfernt haben, werden wir nur solche Punkte ω zu betrachten haben, welche im Inneren der Halbebene liegen und weder mit $\varrho = \frac{-1+\sqrt{-3}}{2}$ noch mit $i = \sqrt{-1}$

im elementaren Sinne aequivalent sind.

Für die Beziehung zwischen ζ und ω gilt nun der Satz:

Ein Werth ζ wird ebenso oft Wurzel der Gleichung $[f(\varphi,\psi)] = 0$ sein, als das entsprechende reducirte ω bei Transformationen n^{ter} Ordnung des vorgelegten Schemas ungeändert bleibt.

und ferner:

Jedesmal q Werthe ζ (oder auch ω) zusammen ergeben eine Wurzel r_q von $\Psi = 0$.

12. Sei jetzt in Uebereinstimmung hiermit:

$$\omega = \frac{a\omega + b}{c\omega + d},$$

$$\text{wo } (ad - bc) = n \text{ und } \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \equiv \pm \begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix} \pmod{5}$$

Wir haben dann

$$c\omega^2 + (d-a)\omega - b = 0$$

oder, wie wir abkürzend schreiben:

$$P\omega^2 + Q\omega + R = 0.$$

Hier sind die ganzen Zahlen $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, $\mathfrak{R}$ (die gern einen Factor gemein haben können, den wir dann aber zweckmässigerweise nicht wegheben) an die Congruenzen gebunden:

$$\mathfrak{P} \equiv \pm c_0,\ \mathfrak{Q} \equiv \pm (d_0 - a_0),\ \mathfrak{R} \equiv \mp b_0 \pmod{5}.$$

Wir setzen noch der Kürze halber

$$a + d = t,$$

worauf natürlich t der Congruenz unterliegt:

$$t \equiv \pm (d_0 + a_0) \pmod{5}.$$

Als Werth der negativ genommenen Discriminante der für ω geltenden quadratischen Gleichung ergiebt sich jetzt:

$$4\mathfrak{P}\mathfrak{R} - \mathfrak{Q}^2 = \nabla = 4n - t^2.$$

Auf solche Weise finden wir: Um alle in Betracht kommenden Werthe von ω zu erhalten, suche man zunächst alle positiven Werthe von ∇, die in der Gestalt $4n - t^2$ enthalten sind, wo $t \equiv \pm (d_0 + a_0) \pmod{5}$. Ferner bestimme man innerhalb

des Ikosaederbereiches der ω-Ebene die Nullstellen aller solcher primitiver oder imprimitiver Gleichungen $P\omega^2 + Q\omega + R = 0$, deren Discriminante $= -\nabla$ ist und die ausserdem den für die P, Q, R aufgestellten Congruenzbedingungen genügen. Von diesen Nullstellen schließe man noch diejenigen aus, deren P, Q, R mit t einen gemeinsamen Theiler haben, — denn sie würden auf uneigentliche Transformationen n ter Ordnung führen. — Ferner schliesse man diejenigen aus, die mit ρ oder i im elementaren Sinne aequivalent sind. Die übrigen ω geben jeweils mit der richtigen Multiplicität die einzelnen Wurzeln der Gleichung $[f] = 0$, und, da sie zu g zusammengehören, der Gleichung $\Psi(r_g) = 0$.

13. Es kommt nun darauf an, für jeden Werth von ∇ die Zahl der hiermit bezeichneten ω-Werthe

abzuzählen. Es möge H die Classenzahl der zu $(-\nabla)$ gehörigen primitiven und imprimitiven Classen quadratischer Formen sein. Von ihnen kommen wegen der eben formulirten Nebenbedingungen gewisse in Wegfall; die Zahl der übrig bleibenden Klassen bezeichnen wir mit H'. Dieses H' baut sich in einfacher Weise aus den Anzahlen h der primitiven Classen auf, die zu solchen Discriminanten gehören, die aus $(-\nabla)$ durch Abtrennung gewisser quadratischer Theiler entstehen. Wir schreiben in diesem Sinne

$$H' = \sum h\left(\frac{-\nabla}{\tau^2}\right),$$

wobei τ theilerfremd zu t zu wählen ist. Ist nämlich (p, q, r) eine Form aus den h Klassen der Discriminante $\left(\frac{-\nabla}{\tau^2}\right)$, so ist die entsprechende Form der Discriminante $(-\nabla)$ offenbar $(\tau p, \tau q, \tau r)$. Diese Form gehört aber zu den gesuchten, da $\tau p, \tau q, \tau r, t$ keinen ge-

meinsamen Theiler haben.

Zu jeder der H' Classen gehören nun innerhalb des Ikosaederbereichs der ω-Ebene 60 Nullpunkte. Unter ihnen müssen wir diejenigen insbesondere aussuchen, welche den für P', Q', R' aufgestellten Congruenzbedingungen genügen. Wir wissen bereits, dass sich die auszuwählenden Punkte in Serien von je g zusammengruppiren.

Eine kurze Ueberlegung zeigt nun, dass sich bei $n \equiv 2, 3 \pmod{5}$ innerhalb der zur einzelnen Classe gehörigen 60 Nullpunkte immer gerade eine Serie von g Punkten befindet, welche die Congruenzbedingungen befriedigt.

Um die Ideen zu fixiren, zeigen wir dies gleich an einem bestimmten Beispiel. Wir nehmen an $n \equiv 2 \pmod{5}$ und ein Schema $\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}$, für das $a_0 + d_0 \equiv \pm 1$ ist. Solcher giebt es 20 mit dem zugehörigen Gewicht 3. Es sei nun eine bestimmte Discri-

minante $\nabla = 4n - t_0^2$ vorgelegt, wo $t_0 \equiv a_0 + d_0 \equiv \pm 1$ ist. Wir greifen nun eine zu $(-\nabla)$ gehörige Classe heraus und von den zugehörigen 60 reducirten ω ein ganz beliebiges ω_0, dem die Form

$$(\mathfrak{P}_0^i, \mathfrak{Q}_0, \mathfrak{R}_0^i)$$

entsprechen möge. Aus $t_0, \mathfrak{P}_0^i, \mathfrak{Q}_0, \mathfrak{R}_0^i$ lässt sich nun offenbar ein entsprechendes Schema $\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}$ berechnen; das natürlich einer zu der ausgewählten Categorie gehörigen Gleichung zugehört, da eben $a_0 + d_0 \equiv \pm 1$ ist. ω_0 liefert daher für eine bestimmte unter den 20 gleichberechtigten Gleichungen eine Wurzel, nämlich für die, welche durch das berechnete Schema charakterisirt ist. Für dieselbe Gleichung liefern natürlich noch 2 andere von den 60 Werthen ω, etwa ω_1 und ω_2 Wurzeln. Wenden wir nun auf $\omega_0, \omega_1, \omega_2$ diejenigen Substitutionen an, welche den Ikosaedersubstitutionen entsprechen, vermittelst deren man aus unserer

letztgenannten Gleichung die 19 gleichberechtigten erhält, so sehen wir, dass für jede dieser 20 Gleichungen sicher 3 von unseren Werthen ω Wurzeln liefern.

Da nun im ganzen 20 gleichberechtigte Gleichungen vorhanden sind, so sind damit auch alle 60 Werthe ω erschöpft, d. h. von den 60 Nullpunkten gehören zu jeder von den $\frac{60}{g}$ gleichberechtigten Gleichungen stets eine und auch nur eine Serie von g Punkten.

Das giebt also für unsere Gleichung

$$g\,\Sigma\,\mathcal{H}'(4n-t^2)$$

Nullpunkte (wobei t natürlich nur Werthe $\equiv \pm(a_0+d_0) \pmod{5}$ zu durchlaufen hat.

Dieselbe Formel gilt bei $n \equiv 1 \pmod 5$ für $a_0+d_0 \equiv 0, \pm 1$, und bei $n \equiv 4 \pmod 5$ für $a_0+d_0 \equiv 0, \pm 2$. Dagegen ist für $n \equiv 1$ und $a_0+d_0 \equiv \pm 2$ und ebenso für $n \equiv 4$ und $a_0+d_0 \equiv \pm 1$ eine Fallunterscheidung

einzuführen.

14. In den zuletzt angegebenen Fällen giebt es im ganzen je 25 zugehörige Gleichungen, die in 3 Categorieen gleichberechtigter zerfallen.

Wir bezeichnen dies kurz so:

$n \equiv 1 \pmod{5}$

	Schemata	Anzahl	g
I	$\pm \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$	1	60
II	$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	12	5
III	$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$	12	5

$n \equiv 4 \pmod{5}$

	Schemata	Anzahl	g
I	$\pm \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$	1	60
II	$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	12	5
III	$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$	12	5

Hier ist die Kategorie I schon von den übrigen getrennt, da sie nur ein ganz bestimmtes Schema enthält. Die Kategorieen II und III können wir dagegen vorläufig noch nicht sondern.

Ehe wir nähere Erläuterungen hierzu geben, bemerken wir noch vorweg, daſs in den betrachteten Fällen die

Discriminante $\nabla = 4n - t^2$ stets durch 5 theilbar ist, wie man leicht nachrechnet.

Sei nun ein beliebiges hergehöriges ∇ gegeben und greifen wir eine beliebige zu $(-\nabla)$ gehörige Klasse heraus, welche die Eigenschaft hat, daß P, Q, R, t keinen gemeinsamen Theiler haben. Dieser entsprechen dann 60 Nullpunkte ω. Hier ist sofort klar, daß die 60 Werthe ω nur Wurzeln für eine der 3 Kategorieen gleichberechtigter Gleichungen liefern können, weil eben für jede Kategorie jedesmal 60 Nullpunkte aufgebraucht werden.

Nach der Lehre von den Gattungen, auf die wir hier nicht näher eingehen können, zerfallen nun, da ∇ durch 5 theilbar ist, die Klassen in 3 Kategorieen:

I. solche, die nur Vielfache von 5 darstellen,

II. solche, die ausser Vielfachen von 5 nur quadr. Reste mod. 5 darstellen,

III. solche, die ausser Vielfachen von 5 nur quadr. Nichtreste mod 5 darstellen.

Diese Eintheilung entspricht nun genau der Eintheilung unserer Schemata in die 3 Kategorieen gleichberechtigter.

Haben wir nämlich für $n \equiv 1$ das Schema $\pm \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$ oder für $n \equiv 4$ das Schema $\pm \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$, so erweisen sich vermöge unserer Congruenzen P, Q, R durch 5 theilbar. Es gehört hierher also die erste Kategorie von Klassen, die nur Vielfache von 5 darstellt.

Die Kategorieen II und III trennen sich, wie wir nun nachweisen wollen, dadurch, dass für die eine, sagen wir für die Kategorie II, nur solche quadratische Formen Wurzeln liefern, die ausser Vielfachen von 5 nur quadratische Reste mod 5 darstellen, so dass für diese Kategorie entweder das Symbol $\left(\frac{C_0}{5}\right)$ oder $\left(\frac{c_0}{5}\right)$ oder beide gleich $+1$ sind.

Für die Gleichungen der Kategorie

III liefern entsprechend nur solche quadr. Formen Wurzeln, die ausser Vielfachen von 5 nur quadratische Nichtreste mod 5 darstellen; für Kategorie III ist daher entweder das Symbol $\left(\frac{b_0}{5}\right)$ oder $\left(\frac{c_0}{5}\right)$ oder beide gleich -1.

Möge nämlich durch die Gleichung

$$P\omega^2 + Q\omega + R = 0,$$

wo entweder das Symbol $\left(\frac{P}{5}\right)$ oder $\left(\frac{Q}{5}\right)$ oder beide gleich $+1$ sind, ein Werth ω definirt werden, der zu einer Wurzel einer Gleichung der II. Kategorie Veranlassung giebt. Es giebt dann noch 59 andere Werthe ω, die zu derselben Klasse gehören, und die zugehörigen quadratischen Formen haben nach der Theorie der Gattungen alle die Eigenschaft, daß entweder das $\left(\frac{P}{5}\right)$ oder $\left(\frac{Q}{5}\right)$ oder beide gleich $+1$ sind. Die 60 Werthe ω vertheilen sich nun aber doch zu je 5 auf die 12 gleichberechtigten Gleichungen; infolgedessen

muß gemäß unseren früheren Congruenzen für die sämmtlichen gleichberechtigten Schemata der II. Kategorie entweder das Symbol $\left(\frac{b_0}{5}\right)$ oder $\left(\frac{c_0}{5}\right)$ oder beide gleich $+1$ sein.

Ganz analoges gilt für die III. Kategorie. Wir können daher unsere Tabelle von pag. 342 so vervollständigen:

$n \equiv 1 \pmod{5}$

Schemata	Anzahl	g
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$ $\left(\frac{b_0}{5}\right)$ und $\left(\frac{c_0}{5}\right) = 0$	1	60
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$ $\left(\frac{b_0}{5}\right)$ oder $\left(\frac{c_0}{5}\right)$ oder beide $= +1$	12	5
$a_0 + d_0 \equiv \pm 2$ $\left(\frac{b_0}{5}\right)$ oder $\left(\frac{c_0}{5}\right)$ oder beide $= -1$	12	5

$n \equiv 4 \pmod{5}$

$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$ $\left(\frac{b_0}{5}\right)$ und $\left(\frac{c_0}{5}\right) = 0$	1	60
$a_0 + d_0 \equiv \pm 1$ $\left(\frac{b_0}{5}\right)$ oder $\left(\frac{c_0}{5}\right)$ oder beide $= +1$	12	5
$\left(\frac{b_0}{5}\right)$ oder $\left(\frac{c_0}{5}\right)$ oder beide $= -1$	12	5

Wir haben jetzt noch kurz die Zahl der Nullpunkte in den 3 Fällen anzugeben. Wir theilen zu diesem Zwecke die zu $(-\nabla)$ gehörigen $\mathcal{H}'$ Klassen in die obigen 3 Kategorieen und bezeichnen deren Anzahlen mit $\mathcal{H}'_0$, $\mathcal{H}'_{+1}$, $\mathcal{H}'_{-1}$, so dass also

$\mathcal{H}'_0$ die Anzahl der Klassen ist, welche nur Vielfache von 5 darstellen,

$\mathcal{H}'_{+1}$ die Anzahl der Klassen ist, welche ausser Vielfachen von 5 nur Q R mod 5 darstellen,

$\mathcal{H}'_{-1}$ die Anzahl der Klassen ist, welche ausser Vielfachen von 5 nur Q N R mod 5 darstellen.

Beachtet man noch, dass

$\mathcal{H}'_0(\nabla) = \mathcal{H}'\left(\frac{\nabla}{25}\right)$ ist, so ist die Zahl der Wurzeln in den 3 Fällen offenbar

$$\left.\begin{array}{l} \text{I. } 60\sum \mathcal{H}'\left(\frac{4n-t^2}{25}\right) \\ \text{II. } q\sum \mathcal{H}'_{+1}(4n-t^2) \\ \text{III. } q\sum \mathcal{H}'_{-1}(4n-t^2) \end{array}\right\} \begin{array}{l} t \equiv \pm 2, \text{ wenn } n \equiv 1 \\ t \equiv \pm 1, \quad \text{"} \quad n \equiv 4 \end{array} \text{ mod 5 ist.}$$

15. Diese Anzahlen sind alle bereits

seiner Zeit von Gierster bestimmt worden, der von ihnen aus zu den Classenzahlrelationen 5ter Stufe gelangt ist, wie man des Näheren in Kl.-Fricke, Modulf. Bd. II, Absch. IV, 6 nachlesen kann, wo auch die gesammte Litteratur des Gegenstandes zusammengestellt ist. Wir können hier aus Mangel an Zeit auf dieselben nicht näher eingehen.

Die obigen Formeln geben zugleich die Zahl der Wurzeln von $[f(\varphi, \varphi')]=0$ und, durch g dividirt, die Zahl der Wurzeln von $\Psi(r_g)=0$. Aber sie geben nicht nur die Zahl dieser Wurzeln, sondern auch deren Bedeutung im einzelnen, sie lassen die Structur der Gleichung $[f(\varphi, \varphi')]=0$ bez. $\Psi(r_g)=0$ erkennen.

Nachdem wir so einen Ueberblick über die Wurzeln der gereinigten Transformationsgleichungen gewonnen und gelernt haben, dieselben mit Hülfe der reducirten Formen (P, Q, R) sämmtlich zu berechnen, machen wir nun den Schritt von den Transforma-

tionsgleichungen zu den Classenglei-
chungen.

Wir bezeichnen als die zu einem Sche-
ma $\begin{vmatrix} a_0 & b_0 \\ c_0 & d_0 \end{vmatrix}$ gehörige Classengleichung
fünfter Stufe der Discriminante $(-\nabla)$
diejenige Gleichung vom Grade h,
welcher die zu den betreffenden primi-
tiven Classen gehörigen Werthe des
r_g genügen. Wir schreiben diese Glei-
chung:

$$X_\nabla(r_g) = 0$$

wobei zu beachten ist, daß eigentlich
noch ein Schema hinzugesetzt werden
müßte.

In den besonderen Fällen, wo nicht
sämmtliche existirenden Classen in
Betracht kommen, construiren wir
die entsprechenden Theilclassenglei-
chungen, die wir dann analog wie
H' mit einem Zusatzindex $+1$ oder
-1 versehen

$$X_\nabla^{+1}(r_g) = 0 \quad X_\nabla^{-1}(r_g) = 0.$$

Endlich setzen wir aus diesen X eben-
so grössere Aggregate X' zusammen,

wie sich die $\mathcal{H}'$ aus den h aufbauen:

$$X'^{r}_{\nabla}(r_g) = \prod X^{r}_{\frac{\nabla}{\tau^2}}(r_g).$$

Eventuell sind beiderseits die Zusatzindices zuzufügen. Wir erhalten dann, den Formeln von № 13 und 14 entsprechend folgende Décomposition des jedesmaligen $\Psi(r_g)$:

1. bei $n \equiv 2, 3 \pmod{5}$, sowie bei $n \equiv 1$ für die Schemata $a_0 + d_0 \equiv 0, \pm 1$ und bei $n \equiv 4$ für die Schemata $a_0 + d_0 \equiv 0, \pm 2$:

$$\Psi(r_g) = \prod X'_{4n-t^2}(r_g); \; t = \pm(a_0 + d_0);$$

2. bei $n \equiv 1, 4$ im Falle jeweils des ausgezeichneten Schemas:

$$\Psi(r_g) = \prod X'^{r}_{\frac{4n-t^2}{25}}(r_g); \; t \equiv \pm 2 \text{ resp. } \equiv \pm 1;$$

(Hier ist r_g einfach gleich f);

3. bei $n \equiv 1, 4$ für die anderen Schemata $a_0 + d_0 \equiv \pm 2$, resp ± 1:

$$\left.\begin{array}{l}\Psi(r_q) = \Pi X'_{+1,\,4n-t^2}(r_q)\\ \Psi(r_q) = \Pi X'_{-1,\,4n-t^2}(r_q)\end{array}\right\}\ t = \pm 2 \text{ resp. } \pm 1.$$

16. Es hat nun keine Schwierigkeit, unsere Ψ in rationaler Weise in die einzelnen X' und fernerhin in die einzelnen χ zu spalten. Man beachte zu diesem Zwecke, daſs die singulären j den Classengleichungen erster Stufe genügen und daſs sich j jedesmal rational durch die in Betracht kommenden r_q darstellt.

Setzt man in $X_\nabla(j) = 0$ für j ein $R^\nu_{\frac{60}{q}}(r_q)$, so erhält man das Produkt von Classengleichungen 5ter Stufe, die zu einer Kategorie gleichberechtigter Schemata gehören. In unseren obigen Formeln haben wir aber ganz andere Zusammenstellungen der Classengleichungen 5ter Stufe; aus beiden wird man daher die einzelne Classengleichung 5ter Stufe rational isoliren können.

Wir erfahren so, dass unsere Gleichungen:

$$X_\nabla(r_g)=0 \quad \text{resp.}\ X_\nabla^{+1}(r_g)=0\,,\ X_\nabla^{-1}(r_g)=0$$

rationale Zahlencoefficienten haben. „Rational" ist dabei natürlich (sofern die Specialuntersuchung der einzelnen Fälle es nicht als überflüssig erscheinen lässt) dahin zu verstehen, dass ε als adjungirt gilt.

Die Auflösung der Classengleichung erster Stufe zieht natürlich die Auflösung unserer Classengleichungen 6ter Stufe unmittelbar nach sich. Wir können daher auch so sagen:

Man betrachte die Darstellung von J als rationale Function $\left(\frac{60}{g}\right)$ter Grades von r_g als eine algebraische Gleichung für r_g. Diese Gleichungen, welche sich kurzweg als Resolventen der Ikosaedergleichung bezeichnen lassen, haben bei gegebenen singulären Werthe von J nach Adjunktion von diesem singulären Werthe J

